Høgskolen i Buskerud. Finn Haugen (finn.haugen@hibu.no).

Eksamen i SEKY3322 Kybernetikk 3

Tid: 2. april 2009. Varighet 5 timer. Vekt i sluttkarakteren: 70%.

Hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler. Kalkulator ikke tillatt.

Oppgavene er skrevet både på norsk og på engelsk (det er selvsagt samme innhold i begge versjonene). Du kan svare på norsk eller engelsk, men ikke kinesisk eller indisk.

Bakerst i oppgavesettet er det en formelsamling.

Kontakt under eksamen: Finn Haugen (faglærer), tlf. 97019215.

Hvis du mener at det mangler forutsetninger for å løse en oppgave, skal du selv definere disse forutsetningene.

Norsk versjon av eksamen

1. (10% vekt) Anta at parametrene a og b i differenslikningen

$$h(k) + a\sqrt{h(k-1)} = h(k-1) + bu(k-1) \tag{1}$$

skal estimeres vha. minste kvadraters metode. (Differenslikningen kan være modellen for en vanntank med vannivå h med innløpspumpe styrt med pådraget u og med utløp gjennom en ventil.) Anta at det foreligger følgende samplede verdier av variablene h og u:

$$\{h(0), h(1), h(2), h(3), h(4)\} \tag{2}$$

$$\{u(0), u(1), u(2), u(3), u(4)\} \tag{3}$$

Skriv opp (den totale) regresjonsmodellen

$$Y = \Phi\theta \tag{4}$$

som danner utgangspunktet for bruk av minste kvadraters metode på dette estimeringsproblemet, men du skal *ikke* beregne estimatet i oppgaven. Regresjonsmodellen skal inneholde kun tilgjengelige sampelverdier. (Du skal angi vektoren Y, matrisen Φ og vektoren θ.)

2. (20) Gitt en motor med følgende matematiske modell:

$$n(s) = \frac{K}{Ts+1}\left[u(s) - L(s)\right] \tag{5}$$

der n er turtall (omdreiningshastighet), u er pådrag, L er ekvivalent lastmoment (representert med samme enhet som pådraget) som kan betraktes som en prosessforstyrrelse, K er forsterkning og T er tidskonstant. K og T har kjente verdier. n måles kontinuerlig. Ovennevnte modell tilsvarer følgende differensiallikning:

$$T\dot{n}(t) + n(t) = K[u(t) - L(t)] \tag{6}$$

Det kan antas at L stort sett er konstant (men altså ukjent). Skriv opp Kalmanfilterlikningene (både korreksjonsdelen og prediksjonsdelen – i detalj) for estimering av n og L. Du kan anta at Kalmanfilter-forsterkningen er K (du skal ikke skrive opp formlene for beregning av K).

3. (5) I forbindelse med bruk av Kalman-filter for estimering av tilstandsvariable, hvilken parameter bør du prøve å justere på for å oppnå hurtigere respons i estimatet for en gitt tilstandsvariabel? Er det noen ulempe mht. estimeringen ved å prøve å oppnå hurtigere estimering?

4. (5) Skriv opp et vilkårlig eksempel på en lineær tidsdiskret tilstandsrommodell med 3 tilstander, 2 pådrag og 2 utganger. Skriv modellen på matrise-vektorform.

5. (5) Anta at du i et dataverktøy som f.eks. LabVIEW eller Matlab skal generere et random signal y som skal ha middelverdi 3 og varians 4. I verktøyet fins en signalgenerator som gir et randomsignal u som har middelverdi 0 og varians 1. Hvordan kan du oppnå y fra u? (Du skal angi y som en matematisk funksjon av u.)

6. (15) Gitt en prosess med 2 tilstandsvariable, x_1 og x_2, og ett pådrag, u. Tilstand x_1 skal reguleres. Referansen er r. Tegn et blokkdiagram som viser strukturen av reguleringssystemet når regulatoren implementerer LQ-regulering med integralvirkning. (Blokkdiagrammet skal vise regulatoren i detalj. Integratoren kan representeres med en integratorblokk.)

7. (5) I MPC, hvilken størrelse i optimalkriteriet er det mest naturlig å justere på for å oppnå jevnere pådragsbruk? Skal størrelsen økes eller minkes? Begrunn svaret (det kreves ingen beregninger i svaret).

8. (10) Gitt prosessmodellen

$$\dot{x} = ax + bu + cv \tag{7}$$

der a, b og c er kjente parametre. u er pådrag. v er forstyrrelse. x skal reguleres. Referansen er r. Finn foroverkoplingsfunksjonen som implementerer foroverkkopling fra referansen og fra forstyrrelsen. Hvilke målinger trengs for å realiserer foroverkoplingen?

9. (15) Utled regulatorfunksjonen for feedback linearization (norsk: lineariserende tilbakekopling eller ulineær dekopling). Forklar hvordan regulatorparametrene i den interne PI-regulatoren kan stilles inn vha. Skogestads metode.

10. (5) Hvordan kan du sjekke om en modellbasert regulator er robust overfor modellfeil, selv om du ikke har noen fysisk prosess å teste reguleringssystemet mot?

11. (5) Forklar hvordan du kan utnytte en softsensor i form av et Kalman-filter til forbedre et reguleringssystems robusthet overfor sensorutfall. Det kreves ingen algoritmer i svaret.

English version of the exam

1. (10% weight) Assume that the parameters a and b in the differential equation

$$h(k) + a\sqrt{h(k-1)} = h(k-1) + bu(k-1) \tag{8}$$

is to be estimated with the Least Squares (LS) method. Assume that the following samples of the variables h and u exist:

$$\{h(0), h(1), h(2), h(3), h(4)\} \tag{9}$$

$$\{u(0), u(1), u(2), u(3), u(4)\} \tag{10}$$

Write the total regression model

$$Y = \Phi\theta \tag{11}$$

which makes the basis for the LS estimation. However, you shall *not* calculate the estimate in this Problem. The regression model contains only the samples of h and u that are available. (You are to find the vector Y, matrix Φ, and the vector θ.)

2. (20) Given a motor with this mathematical model:

$$n(s) = \frac{K}{Ts+1}[u(s) - L(s)] \tag{12}$$

where n is rotational speed, u is control variable, L is equivalent load torque (represented in the same unit as the control variable) which can be regarded as a process disturbance, K is gain, and T is time-constant. K and T has known values. n is measured continuously. This model corresponds to the following differential equation:

$$T\dot{n}(t) + n(t) = K[u(t) - L(t)] \tag{13}$$

L is assumed to be mostly constant. Write down the Kalman-filter equations for estimation of n and L. (The correction and prediction parts of the Kalman-filter shall be written in detail.) You can assume that the Kalman-filter gain is K (you are not asked to write the equations for calculating K).

3. (5) In Kalman-filter applications, which parameter should you adjust to try to obtain faster response in the estimate of a given state variable? Is there any drawback regarding the estimation as you try to obtain a faster estimation?

4. (5) Write down an example of a linear discrete-time state-space model having 3 state variables, 2 control variables, and 2 output variables. Writ the model with matrices and vectors.

5. (5) Assume that you in a computer tool as LabVIEW or Matlab shall generate a random signal y with mean 3 and variance 4. Assume that the tool has signal generator giving a random signal u with mean 0 and variance 1. How can you obtain y from u? (Express y as a mathematical function of u.)

6. (15) Given a process with 2 state variables, x_1 and x_2, and one control variable, u. x_1 is to be controlled. The reference is r. Draw a block diagram showing the structure of the control system with LQ-control with integral action. (The block diagram shall display the controller in detail. The integrator shall be represented with an integrator block.)

7. (5) In MPC, which parameter in the optimization criterion would you adjust to obtain a smoother control signal? Will you increase or decrease the parameter? Give a reason for your answer (no calculations are needed).

8. (10) Given the process model

$$\dot{x} = ax + bu + cv \tag{14}$$

where a, b, and c are known parameters. u is control variable. v is process disturbance. x is to be controlled. The reference is r. Derive the feedforward controller containing both feedforward from reference and from disturbance. Which measurements are needed to realize the feedforward controller?

9. (15) Derive the control function of feedback linearization. Explain how the controller parameters of the internal PI controller can be calculated using Skogestad's method.

10. (5) How can you test a model based controller for robustness against model errors, even though there is no physical process to use in the testing?

11. (5) Explain how you can use a soft-sensor in the form of a Kalman-filter to increase the robustness of a control system against sensor drop-outs. No algorithms are required in your answer.

Formelliste for eksamen i SEKY3322 Kybernetikk 3

På eksamen må du selv velge hvilke(n) av formlene som er aktuelle i den enkelte oppgave.

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h} \tag{15}$$

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{h} \tag{16}$$

$$u(t) = u_0 + K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e \, d\tau + K_p T_d \dot{e}_f(t) \tag{17}$$

$$x(k+1) = f[x(k),\ u(k)] \tag{18}$$

$$y(k) = g[x(k),\ u(k)] \tag{19}$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{20}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \tag{21}$$

$$A = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{\text{op}} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{\text{op}} \tag{22}$$

$$B = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \right|_{\text{op}} = \left. \frac{\partial f}{\partial u^T} \right|_{\text{op}} \tag{23}$$

$$C = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{\text{op}} = \left. \frac{\partial g}{\partial x^T} \right|_{\text{op}} \tag{24}$$

$$D = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \right|_{\text{op}} = \left. \frac{\partial g}{\partial u^T} \right|_{\text{op}} \tag{25}$$

$$\mathcal{Z}\left\{y(k)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} \tag{26}$$

$$k_1 y_1(z) + k_2 y_2(z) \Longleftrightarrow k_1 y_1(k) + k_2 y_2(k) \tag{27}$$

$$z^{-n} y(z) \Longleftrightarrow y(k-n) \tag{28}$$

$$z^{n} y(z) \Longleftrightarrow y(k+n) \tag{29}$$

$$\text{Unity step at time-step } k=0\text{: } 1 \iff \quad \frac{z}{z-1} \tag{30}$$

$$H_s = \frac{y_s}{u_s} = \lim_{z\to 1} H(z) = H(1) \tag{31}$$

$$L(z) = H_c(z) \underbrace{H_u(z) H_s(z)}_{H_p(z)} = H_c(z) H_p(z) \tag{32}$$

$$T(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} = \frac{\frac{n_L(z)}{d_L(z)}}{1+\frac{n_L(z)}{d_L(z)}} = \frac{n_L(z)}{d_L(z)+n_L(z)} \tag{33}$$

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \tag{34}$$

$$\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left[x(k) - m_x\right]^2 \tag{35}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(x)} \tag{36}$$

$$R_x(L) = E\{[x(k+L) - m_x][x(k) - m_x]\} \tag{37}$$

$$R_{xy}(L) = E\{[x(k+L) - m_x][y(k) - m_y]\} \tag{38}$$

$$\delta(L) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ when } L = 0 \\ 0 \text{ when } L \neq 0 \end{array} \right. \tag{39}$$

$$m_y = G m_v + C \tag{40}$$

$$\sigma_y^2 = G^2 \sigma_v^2 \tag{41}$$

$$y = \Phi\theta \tag{42}$$

$$\theta_{\mathrm{LS}} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \tag{43}$$

$$\dot{x}_k \approx \frac{\frac{x_{k+1}-x_k}{h} + \frac{x_k - x_{k-1}}{h}}{2} = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h} \tag{44}$$

$$M_{\mathrm{obs}} = \left[\begin{array}{c} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{array} \right] \tag{45}$$

$$x(k+1) = f[x(k),\, u(k)] + Gw(k) \tag{46}$$

$$y(k) = g[x(k),\, u(k)] + Hw(k) + v(k) \tag{47}$$

$$R_w(L) = Q\delta(L) \tag{48}$$

$$R_v(L) = R\delta(L) \tag{49}$$

$$y_p(k) = g\left[x_p(k)\right] \tag{50}$$

$$e(k) = y(k) - y_p(k) \tag{51}$$

$$x_c(k) = x_p(k) + Ke(k) \tag{52}$$

$$x_p(k+1) = f[x_c(k),\, u(k)] \tag{53}$$

$$\dot{x} = f + Bu \tag{54}$$

$$\ddot{x} = f + Bu \tag{55}$$

$$T(s) = \frac{y_{mf}(s)}{y_{m_{SP}}(s)} = \frac{1}{T_C s + 1} e^{-\tau s} \tag{56}$$

$H(s)$	K_p	T_i	T_d
$\frac{K}{s} e^{-\tau s}$	$\frac{1}{K(T_C+\tau)}$	$k_1\,(T_C + \tau)$	0
$\frac{K}{Ts+1} e^{-\tau s}$	$\frac{T}{K(T_C+\tau)}$	$\min\left[T,\, k_1\,(T_C + \tau)\right]$	0
$\frac{K}{(Ts+1)s} e^{-\tau s}$	$\frac{1}{K(T_C+\tau)}$	$k_1\,(T_C + \tau)$	T
$\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} e^{-\tau s}$	$\frac{T_1}{K(T_C+\tau)}$	$\min\left[T_1,\, k_1\,(T_C + \tau)\right]$	T_2
$\frac{K}{s^2} e^{-\tau s}$	$\frac{1}{4K(T_C+\tau)^2}$	$4\,(T_C + \tau)$	$4\,(T_C + \tau)$

$$u = B^{-1}\left(K_p e + K_i \int_0^t e d\tau + \dot{r}_{y_f} - f\right) \tag{57}$$

$$u = B^{-1}\left(K_p e + K_i \int_0^t e d\tau + K_d \frac{de_f}{dt} + \ddot{r}_{y_f} - f\right) \tag{58}$$

$$K_{p_p} = K_{p_s}\left(1 + \frac{T_{d_s}}{T_{i_s}}\right) \tag{59}$$

$$T_{i_p} = T_{i_s}\left(1 + \frac{T_{d_s}}{T_{i_s}}\right) \tag{60}$$

$$T_{d_p} = T_{d_s} \frac{1}{1 + \frac{T_{d_s}}{T_{i_s}}} \tag{61}$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + G_w w(k) \tag{62}$$

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) + 2x^T(k) N u(k) \right] \tag{63}$$

$$u(k) = -G(k)x(k) \tag{64}$$

$$M_{\text{control}} = \left[B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \cdots \vdots A^{n-1} B \right] \tag{65}$$

$$\begin{aligned} J \quad = \quad & \sum_{i=N_w}^{N_p} \left[\hat{y}(t_{k+i}|t_k) - r(t_{k+i}|t_k)\right]^T Q \left[\hat{y}(t_{k+i}|t_k) - r(t_{k+i}|t_k)\right] && (66) \\ & + \sum_{i=1}^{N_c-1} \left[\Delta u(t_{k+i}|t_k)\right]^T R \left[\Delta u(t_{k+i}|t_k)\right] && (67) \\ & + \sum_{i=N_w}^{N_p} \left[u(t_{k+i}|t_k) - s(t_{k+i}|t_k)\right]^T N \left[u(t_{k+i}|t_k) - s(t_{k+i}|t_k)\right] && (68) \end{aligned}$$