Høgskolen i Buskerud
Finn Haugen (finn.haugen@hibu.no)
21.9 2008

SEKY3322 Kybernetikk 3: Øving 6

Oppgave 1

Her er en forenklet matematisk modell av et fartøy:

$$m\ddot{z} = F_p - D\dot{z} \tag{1}$$

der z er posisjonen, m er massen, F_p er propellkraften og D er dempekonstanten. I de aktuelle oppgavene nedenfor skal observerbarhetsanalyse baseres på diskretisert modell.

1. Skriv opp en tidskontinuerlig tilstandsrommodell på formen

   $$\dot{x} = A_c x + B_c u \tag{2}$$

   svarende til (1).

2. Finn en tidsdiskret tilstandsrommodell på formen

   $$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{3}$$

   basert på diskretisering med Eulers forovermetode (samplingstid h).

3. Anta at kun posisjonen måles. Påvis at systemet da er observerbart. Prøv å gi en fortolkning eller forklaring av at systemet *er* observerbart.

4. Anta at kun hastigheten måles. Påvis at systemet da er ikke er observerbart. Prøv å gi en fortolkning eller forklaring av at systemet *ikke er* observerbart.

Løsning til oppgave 1

1. Tidskontinuerlig tilstandsrommodell (subindeks c for continuous):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{D}{m} \end{bmatrix}}_{A_c} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B_c} u \tag{4}$$

2. Diskretisering med Eulers forovermetode (samplingstid h):

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{h} = A_c x(t_k) + B_c u(t_k) \tag{5}$$

som gir

$$x(t_{k+1}) = x(k) + hA_c x(t_k) + hB_c u(t_k) \tag{6}$$

eller

$$x(k+1) = \underbrace{(I + hA_c)}_{A} x(t_k) + \underbrace{hB_c}_{B} u(t_k) \tag{7}$$

eller, detaljert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}}_{x(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 - \frac{hD}{m} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h}{m} \end{bmatrix}}_{B} u(k) \tag{8}$$

3. Kun posisjonen måles, dvs.

$$y(k) = x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{9}$$

Observerbarhetsmatrisen:

$$M_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} C \\ CA^{2-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$= \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ ---------- \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 - \frac{hD}{m} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ ---------- \\ \begin{bmatrix} 1 & h \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & h \end{bmatrix} \tag{14}$$

M_{obs} har determinant

$$\det(M_{obs}) = 1 \cdot h - 1 \cdot 0 = h \tag{15}$$

som er forskjellig fra null. Systemet er derfor observerbart.

En fortolkning av at systemet er observerbart når posisjonen måles, er at posisjonen inneholder informasjon om hastigheten også, siden element (1,2) i A-matrisen i (8) er forskjellig fra null. Derfor skal det være mulig å beregne hastigheten (tilstand 2) ut fra kjennskap (måling) av posisjonen (tilstand 1). Spesielt skal vi kunne beregne en ukjent initialverdi for begge tilstandene. Alle tilstandene er derfor observerbare.

4. Nå er det kun hastigheten som måles:

$$y(k) = x_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{16}$$

Observerbarhetsmatrisen:

$$\begin{aligned}
M_{\text{obs}} &= \begin{bmatrix} C \\ CA^{2-1} \end{bmatrix} && (17) \\
&= \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} && (18) \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ ---------- \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 - \frac{hD}{m} \end{bmatrix} \end{bmatrix} && (19) \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ ---------- \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 - \frac{hD}{m} \end{bmatrix} \end{bmatrix} && (20) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 - \frac{hD}{m} \end{bmatrix} && (21)
\end{aligned}$$

M_{obs} har determinant

$$\det(M_{obs}) = 0 \cdot h - 0 \cdot 1 - \frac{hD}{m} = 0 \tag{22}$$

som altså er null. Systemet er derfor *ikke observerbart.*

En fortolkning av at systemet ikke er observerbart når kun hastigheten måles, er at en ikke kan si hva posisjonen er, ut fra kjenneskap til hastigheten, siden hastigheten er den deriverte (endringsraten) av posisjonen. Det fins jo intet entydig posisjonsforløp som har en gitt hastighet. Spesielt kan vi ikke kunne beregne en ukjent initialverdi for posisjonen bare ut fra kjennskap til hastigheten. Systemet (som helhet) er derfor ikke observerbart.