

# Kapittel 5

## Frekvensrespons

### 5.1 Innledning

Et systems *frekvensrespons* er en frekvensavhengig funksjon som uttrykker hvilken respons sinussignaler (eller cosinussignaler) med forskjellige frekvenser i systemets inngangsvariabel er opphav til i systemets utgangsvariabel.

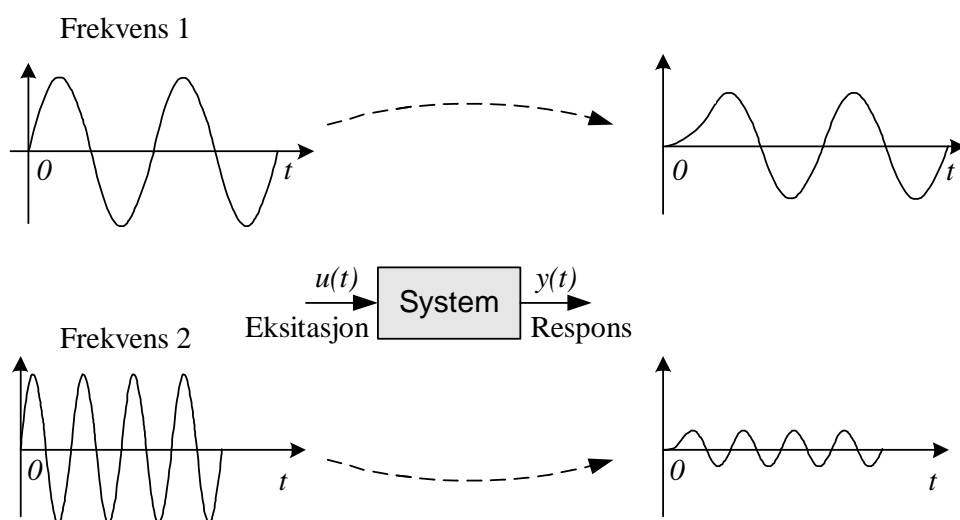
Tidsvarierende signaler som påvirker systemer, f.eks. referansen eller forstyrrelser for reguleringsystemer, inngangssignaler for fysiske prosesser eller målesignaler som er inngangssignaler til signalfiltere, kan tenkes bygd opp av en sum av *frekvenskomponenter*, som er sinussignaler (eller cosinus-) med forskjellige frekvenser. (Fourierrekkeutvikling og Fouriertransformasjonen kan brukes til å uttrykke disse frekvenskomponentene, om vi trenger presis informasjon om dem.) Frekvensresponsen uttrykker hvilken respons på systemets utgang hver av disse frekvenskomponentene er opphav til. Noen frekvenskomponenter forsterkes, andre forminskes, og de respektive faseforskyvningene gjennom systemet kan være forskjellige.

Frekvensrespons er et meget viktig begrep innen analyse og design av signalfiltere (f.eks. lavpassfiltere og høypassfiltere). Frekvensrespons benyttes også innen reguleringssteknikken for å uttrykke reguleringsystemers evne til å følge tidsvarierende referansesignaler og evne til å kompensere for tidsvarierende forstyrrelser som påvirker prosessen som reguleres. Frekvensresponsbasert design er en klassisk modellbasert designmetode for reguleringsystemer. (Kapitlet har eksempler på bruk av frekvensrespons for analyse av filtere og

reguleringssystemer.)

Definisjonen av frekvensresponsen *gjelder bare for systemer med en lineær modell*, men denne modellen kan være den lokale lineære modellen omkring et arbeidspunkt for en opprinnelig ulineær modell. Variablene som brukes i dette kapitlet, kan altså være avviksvARIABLE omkring et arbeidspunkt for en ulineært system.

Frekvensresponsen kan finnes eksperimentelt eller fra systemets transferfunksjonsmodell. Frekvensresponsen kan presenteres grafisk eller som en matematisk funksjon (med frekvensen som argument).



Figur 5.1: Sinussignaler på inngangen og tilhørende sinusrespons for to forskjellige frekvenser

## 5.2 Hva er frekvensrespons?

Vi kan finne frekvensresponsen for et system ved å sette sinussignaler med forskjellige frekvenser på systeminngangen etter tur og observere responsen på systemutgangen. Frekvensresponsen er en funksjon av frekvensen, så vi må i prinsippet gjenta eksperimentene for alle de spesifiserte frekvensene  $\{\omega_i\}$ . Frekvensenheten for  $\omega_i$  er rad/s eller generelt: rad/tidsenhet.<sup>1</sup> Anta

<sup>1</sup>Sammenhengen mellom en frekvens  $\omega$  i rad/s og frekvensen  $f$  i Hz er  $\omega = 2\pi f$ .

at den aktuelle frekvensen er  $\omega$ . Vi setter sinussignalet

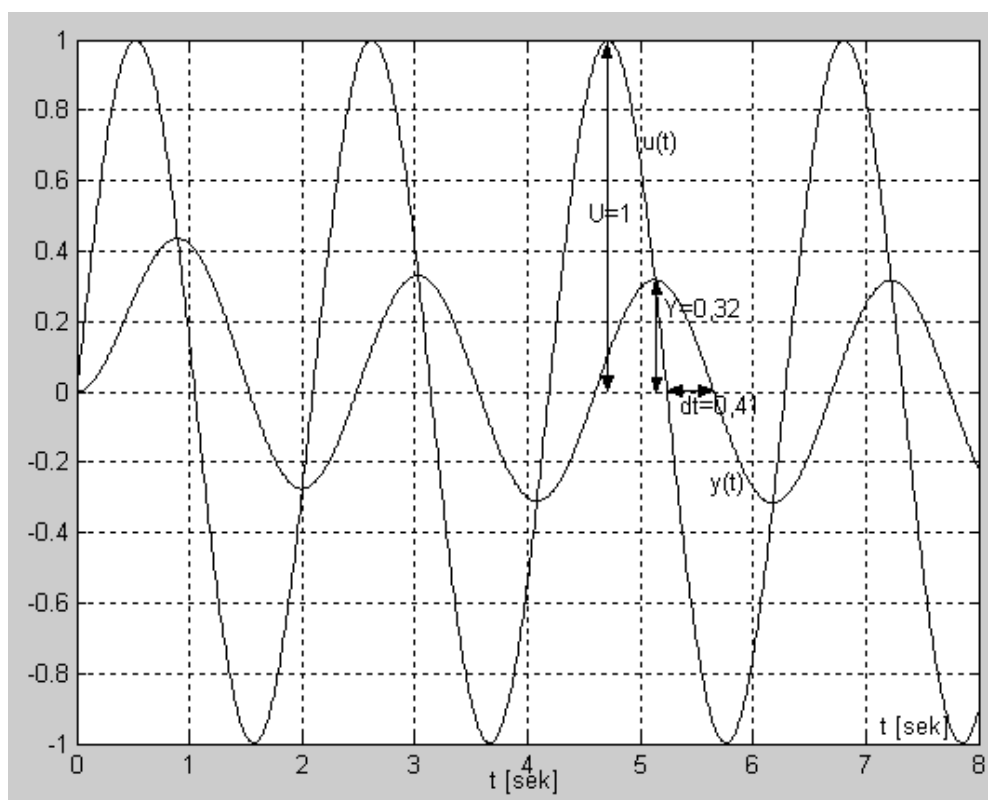
$$u(t) = U \sin \omega t \quad (5.1)$$

på systemets inngang, se figur 5.1. Inngangssignalet vil være opphav til en transientrespons som vil dø ut etterhvert. Den gjenstående *stasjonære* responsen  $y_s(t)$  på systemets utgang blir

$$y_s(t) = Y \sin(\omega t + \phi) \quad (5.2)$$

$$= \underbrace{UA}_Y \sin(\omega t + \phi) \quad (5.3)$$

der  $A$  er (*amplitude*)forsterkningen og  $\phi$  ("fi") er *faseforskyvningen* i radianer. Frekvensen blir den samme i  $y_s(t)$  som i  $u(t)$ . Figur 5.2 viser i detalj inngangssignalet  $u(t)$  og den tilhørende (sinus)responsen  $y(t)$  for et simulert system. Systemet som simuleres er



Figur 5.2: Inngangssignalet  $u(t)$  og den tilhørende (sinus)responsen  $y(t)$  for et simulert system.  $u(t)$  har frekvens  $\omega = 3$  rad/sek og amplitude  $U = 1$ . Systemet som simuleres, er gitt ved (5.4).

$$y(s) = \frac{1}{s+1} u(s) \quad (5.4)$$

Inngangssignalet  $u(t)$  har frekvens  $\omega = 3$  rad/sek og amplitude  $U = 1$ .

$A$  er forholdet mellom sinussignalenes amplituder:

$$A = \frac{Y}{U} \quad (5.5)$$

For signalene vist i figur 5.2 blir

$$A = \frac{Y}{U} = \frac{0,32}{1} = 0,32 \quad (5.6)$$

$\phi$  kan beregnes ved først å måle tidsforskyvningen  $\Delta t$  mellom  $u(t)$  og  $y_s(t)$  og så beregne  $\phi$  med

$$\phi = -\omega \Delta t \quad [\text{rad}] \quad (5.7)$$

I figur 5.2 finner vi  $\Delta t = 0,41$  sek, hvilket gir

$$\phi = -\omega \Delta t = -3 \cdot 0,41 = -1,23 \text{ rad} \quad (5.8)$$

Forsterkningen  $A$  og faseforskyvningen  $\phi$  er funksjoner av frekvensen. Vi kan bruke betegnelsene *forsterkningsfunksjonen*  $A(\omega)$  og *fasefunksjonen*  $\phi(\omega)$  om funksjonene, og vi kan si at disse funksjonene er *systemets frekvensrespons*.

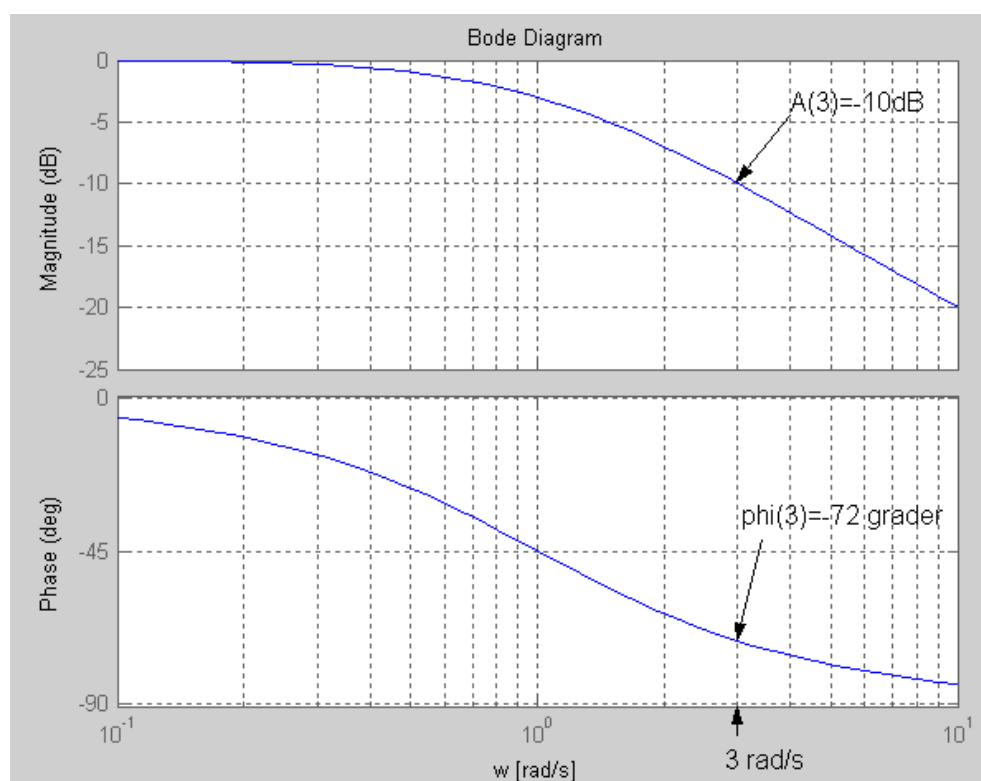
## Bodediagram

Det er nokså vanlig å framstille  $A(\omega)$  og  $\phi(\omega)$  grafisk i et såkalt *Bodediagram*<sup>2</sup>, som består av to diagrammer for hhv.  $A(\omega)$  og  $\phi(\omega)$ . Faseverdier avmerkes vanligvis i enhet grader (ikke radianer). Figur 5.3 viser Bodediagrammet for systemet (5.4) som er brukt for å generere  $u(t)$  og  $y(t)$  vist i figur 5.2. Verdiene  $A(3) = 0,32 = -10,2$  dB (dB-enheten er beskrevet nedenfor) og  $\phi(3) = -1,23$  rad =  $-72$  grader, som vi fant fra signalene i figur 5.2, er avmerket i diagrammet. Resten av punktene på kurvene kan vi ha funnet fra en serie eksperimenter (simuleringer) eller fra et matematisk uttrykk for frekvensresponsen funnet ut fra systemets transferfunksjon, jf. kap. 5.4.1. Frekvensaksen i Bodediagrammet tegnes vanligvis logaritmisk med 10-logaritmen for frekvensen som enhet. Også aksene for  $A(\omega)$  tegnes vanligvis logaritmisk, og da gjerne med desibel som enhet. Et tall  $x$  blir i desibel lik

$$x \text{ [dB]} = 20 \log_{10} x \quad (5.9)$$

Tabell 5.1 viser noen eksempler på dB-verdier.

<sup>2</sup>som også betegnes AFF-diagram (amplitude – fase – frekvens)



Figur 5.3: Bodediagram for systemet gitt ved (5.4)

### 5.3 Hvordan finne frekvensresponsen fra eksperimenter

I underkap. 5.2 så vi at frekvensresponsen (dvs. forsterkningsfunksjonen og fasefunksjonen) kan finnes ved å påtrykke systemet et antall sinussignaler med forskjellige frekvenser etter tur på inngangen og sammenholde de enkelte inngangssignal med tidsresponsen (utgangssignalet). Dette er en grei oppskrift for et eksperiment for å finne frekvensresponsen. Det fins imidlertid alternative metoder, som beskrives kort i det følgende.

#### 5.3.1 Korrelasjonsmetoden

I korrelasjonsmetoden [8] [10] gjennomføres ett eksperiment for hver frekvens,  $\omega_i$ , som man skal finne frekvensresponsen for. I eksperiment nr.  $i$  brukes inngangssignalet

$$u_i(t) = U_i \sin(\omega_i t) \quad (5.10)$$

0	=	$-\infty$ dB
0,01	=	-40dB
0,1	=	-20dB
0,2	=	-14dB
0,25	=	-12dB
0,5	=	-6dB
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	=	-3dB
1	=	0dB
$\sqrt{2}$	=	3dB
2	=	6dB
$\sqrt{10}$	=	10dB
4	=	12dB
5	=	14dB
10	=	20dB
100	=	40dB

Tabell 5.1: Noen dB-verdier

På basis av den tilsvarende stasjonære responsen  $y_{i_s}(t)$  beregnes følgende to integraler:

$$S_i = \int_0^{T_e} y_{i_s}(t) \sin(t) dt \quad (5.11)$$

$$C_i = \int_0^{T_e} y_{i_s}(t) \cos(\omega_i t) dt \quad (5.12)$$

der  $T_e$  er eksperimentlengden, som bør velges et antall (f.eks. 5) ganger sinussignalets periodetid, som er  $2\pi/\omega_i$ . Forsterkningsfunksjonen er da gitt ved

$$A(\omega_i) = \frac{2}{U_i T_e} \sqrt{S_i^2 + C_i^2} \quad (5.13)$$

og fasefunksjonen er gitt ved

$$\phi(\omega_i) = \arctan \frac{C_i}{S_i} \quad (5.14)$$

Korrelasjonsmetoden kan programmeres og derved automatiseres. En MATLAB-algoritme for å beregne (5.11) er

```

N=Te/h; %h er tidsskrittet
Si=0;
for k=1:N
Si=Si+h*y(k)*sin(wi*k*h);
end;

```

### 5.3.2 Fouriertransformasjon

Frekvensresponsen, som vi her kan betegne  $F(\omega)$  og som blir et komplekst tall, kan beregnes som forholdet mellom utgangssignalets Fouriertransformerte  $Y_F(\omega)$  og inngangssignalets Fouriertransformerte  $U_F(\omega)$  [10]:

$$F(\omega) = \frac{Y_F(\omega)}{U_F(\omega)} \quad (5.15)$$

Forsterkningsfunksjonen blir

$$A(\omega) = |F(\omega)| \quad (5.16)$$

og fasefunksjonen blir

$$\phi(\omega) = \arg F(\omega) \quad (5.17)$$

I prinsippet står man nokså fritt i å velge typen inngangssignal  $u$ , men best resultater oppnås hvis signalet inneholder mange forskjellige frekvenskomponenter. Noen muligheter:

- **PRB-signalet** (eller bare PRBS) (Pseudo Random Binary Signal), som er et signal som på en tilfeldig måte antar én av to mulige verdier
- **Et random-signal** (fortrinnsvis uniformt fordelt), som ved hvert tidsskritt antar en tilfeldig (random) verdi
- **Et kvitre-signal (chirp-signal)**, som er et sinussignal med jevnt stigende frekvens

(Disse signalene er beskrevet nærmere i kap. 7, fra side 191.)

I praksis beregnes de Fouriertransformerte i (5.15) vha. tidsdiskret Fouriertransformasjonen eller DFT (Discrete-Time Fourier Transform). [11] [10]

Beregning av frekvensresponsen med bruk av denne metoden er implementert i funksjonen `etfe` (Empirical Transfer Function Estimate) i System Identification Toolbox i MATLAB og i funksjonene `Transfer Function` og `Transfer Function PtByPt`<sup>3</sup> i LabVIEW. Disse funksjonene benytter FFT (Fast Fourier Transform) for realisering av DFT. FFT er en optimal algoritme for beregning av DFT.

<sup>3</sup>PtByPt = Point-By-Point, dvs. en (slags) sanntids eller rekursiv algoritme

### 5.3.3 Frekvensrespons fra estimert transferfunksjonsmodell

Det fins mange metoder for å estimere eller beregne en transferfunksjon  $H(s)$  ut fra eksperimentelle data, bl.a. minste-kvadraters metode, prediksjonsfeilmotoden og subspace-motoden[10]. (Estimering av parametre i transferfunksjoner fra eksperimentelle data med minste kvadraters metode beskrives i kap. 7.) Når en  $H(s)$  er funnet, kan frekvensresponsen utledes fra  $H(s)$ , som forklart i underkap. 5.4.1.

## 5.4 Transferfunksjonsbasert frekvensrespons

### 5.4.1 Hvordan beregne frekvensresponsen fra transferfunksjonen

I underkap. 5.3 så vi hvordan frekvensresponsen kan finnes ut fra eksperimenter utført på det fysiske systemet. Vi trenger da ingen forkunnskaper om systemets matematiske modell. Men dersom vi kjenner modellen i form av transferfunksjonen, kan vi i stedet *regne oss fram til frekvensresponsen ut fra transferfunksjonen*, slik (utledningen følger straks): Anta at systemet som frekvensresponsen skal finnes for, har transferfunksjonsmodellen

$$y(s) = H(s)u(s) \quad (5.18)$$

I  $H(s)$  erstattes  $s$  med  $j\omega$ , hvilket gir den komplekse størrelsen  $H(j\omega)$ , som vi betegner systemets *frekvensresponsfunksjon* eller bare *frekvensrespons*. *Forsterkningsfunksjonen* er amplituden eller absoluttverdien av  $H(j\omega)$ :

$$A(\omega) = |H(j\omega)| \quad (5.19)$$

og *fasefunksjonen* er vinkelen eller argumentet av  $H(j\omega)$ :

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) \quad (5.20)$$

Forsterkningsfunksjonen  $|H(j\omega)|$  og fasefunksjonen  $\arg H(j\omega)$  kan plottes i et Bodediagram.

### Utledning

Vi skal nå utlede (5.19) og (5.20). Inngangssignalet er en sinus:

$$u(t) = U \sin \omega t \quad (5.21)$$



som Laplacetransformert er, jf. (B.25),

$$u(s) = \frac{U\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5.22)$$

Den tilhørende tidsresponsens Laplacetransformerte er

$$y(s) = H(s)u(s) = H(s)\frac{U\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5.23)$$

Vi finner  $y(t)$  ved å invers-Laplacetransformere  $y(s)$ : Vi antar at  $H(s)$  har polene  $p_1, \dots, p_n$  og at de ligger i venstre halvplan (hvilket svarer til at systemet er asymptotisk stabilt, jf kap. 6). For enkelhets skyld lar vi  $p_1, \dots, p_n$  være forskjellige, men resultatet vi kommer frem til, er ikke avhengig av denne antakelsen. Fra den generelle invers-transformasjonsformelen (3.181), får vi (siden polenes orden er 1)

$$y(t) = \sum_i \lim_{s \rightarrow a_i} (s - a_i) H(s) \frac{U\omega}{s^2 + \omega^2} e^{st} \quad (5.24)$$

der  $\{a_i\}$  omfatter polene  $\{p_i\}$  i  $h(s)$  samt  $+j\omega$  og  $-j\omega$ , som kommer fra leddet  $s^2 + \omega^2$ . Fra (5.24) ser vi at  $y(t)$  vil inneholde en sum av ledd av typen  $e^{a_i t}$ . Vi er interessert i den stasjonære sinusresponsen  $y_s(t)$ , det vil si den delen av responsen som er igjen etter at transientdelen har dødd ut. Når  $t \rightarrow \infty$ , vil alle  $e^{a_i t}$  for slike  $a_i$  som ligger i venstre halvplan, bli null. Det ser vi slik: En pol kan skrives

$$a = \operatorname{Re}(a) + j \operatorname{Im}(a) \quad (5.25)$$

som vil være opphav til ledd av typen

$$e^{[\operatorname{Re}(a)+j \operatorname{Im}(a)]t} = e^{[\operatorname{Re}(a)]t} \cdot e^{j[\operatorname{Im}(a)]t} \quad (5.26)$$

Når polen  $a$  ligger i venstre halvplan, er  $\operatorname{Re}(a) < 0$ , så når  $t \rightarrow \infty$ , vil (5.26) gå mot 0. Nå er jo alle de  $a_i$  som ligger i venstre halvplan identiske med alle  $p_i$  for vi antok jo at alle  $p_i$  lå i venstre halvplan. Altså vil alle  $e^{p_i t}$  gå mot null. Det eneste bidraget til  $y_s(t)$  kommer derfor fra leddene  $e^{j\omega t}$  og  $e^{-j\omega t}$  (som *ikke* går mot null når  $t \rightarrow \infty$ ). Den stasjonære responsen er altså

$$y_s(t) = H(j\omega) \frac{U\omega}{2j\omega} e^{j\omega t} + H(-j\omega) \frac{U\omega}{-2j\omega} e^{-j\omega t} \quad (5.27)$$

Her er  $H(j\omega)$  en kompleks størrelse fordi den er en funksjon av den komplekse størrelsen  $j\omega$ .  $H(j\omega)$  kan skrives på polar form slik:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg H(j\omega)} \quad (5.28)$$

som vi straks skal sette inn i (5.27). Fra teorien om komplekse tall har vi at

$$|H(j\omega)| = |H(-j\omega)| \quad (5.29)$$

og

$$\arg H(j\omega) = -\arg H(-j\omega) \quad (5.30)$$

Med bruk av (5.28), (5.29) og (5.30) blir (5.27)

$$y_s(t) = U|H(j\omega)| \frac{e^{j[\omega t + \arg H(j\omega)]} - e^{-j[\omega t + \arg H(j\omega)]}}{2j} \quad (5.31)$$

$$= U \underbrace{|H(j\omega)|}_{A(\omega)} \sin[\omega t + \underbrace{\arg H(j\omega)}_{\phi(\omega)}] \quad (5.32)$$

Overgangen fra (5.31) til (5.32) er basert på (A.13). Dermed har vi utledet (5.19) og (5.20).

Følgende eksempel viser bl.a. hvordan vi kan tegne *asymptoter* for frekvensresponsen i et Bodediagram. Asymptoter kan være nyttige ved rask manuell opptegning av frekvensresponskurver. Asymptotene kan imidlertid være ganske unøyaktige i forhold de eksakte verdiene i frekvensområdet omkring knekkfrekvensen (der asymptotekurven knekker). Vi bør derfor bruke (tegne) eksakte frekvensresponskurver der det er mulig.

#### Eksempel 41 *Frekvensrespons funnet fra transferfunksjonen*

Vi skal finne frekvensresponsen for transferfunksjonen

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} = \frac{K}{\frac{s}{\omega_k} + 1} \quad (5.33)$$

der *knekkfrekvensen*

$$\omega_k = \frac{1}{T} \text{ [rad/s]} \quad (5.34)$$

er innført. Knekkfrekvensen gjelder asymptotene for frekvensresponsen tegnet i et Bodediagram. Vi kommer nærmere inn på dette lenger ned i eksempelet. For å finne frekvensresponsen, setter vi  $s = j\omega$  i  $H(s)$ :

$$H(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1} = \frac{K}{\underbrace{1}_{\text{Re}} + j\underbrace{T\omega}_{\text{Im}}} \quad (5.35)$$

som vi setter på polar-form (jf. vedlegg A.2):

$$H(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{1^2 + (T\omega)^2} e^{j \arctan(\frac{T\omega}{1})}} \quad (5.36)$$

$$= \frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} e^{j[-\arctan(T\omega)]} \quad (5.37)$$

$$= |H(j\omega)| e^{j \arg H(j\omega)} \quad (5.38)$$

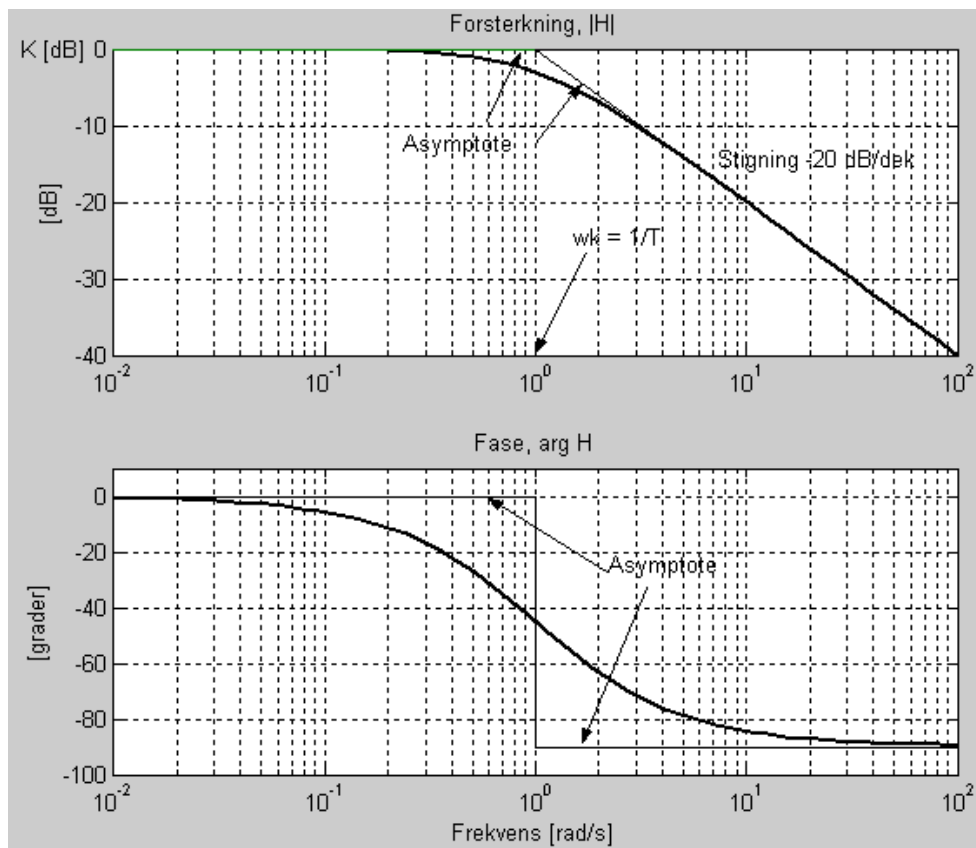
Vi har dermed funnet at forsterkningsfunksjonen er

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2}} \quad (5.39)$$

og fasefunksjonen er

$$\arg H(j\omega) = -\arctan(T\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right) \quad [\text{rad}] \quad (5.40)$$

Figur 5.4 viser eksakte (og asymptotiske) kurver for  $|H(j\omega)|$  og  $\arg H(j\omega)$  tegnet i et Bodediagram. (Tallverdiene langs aksene gjelder for  $K = 1$  og  $T = 1$ .)



Figur 5.4: Bodediagram for frekvensresponsen for et 1. ordens lavpassfilter gitt ved (5.33)

*Asymptotene* i Bodediagrammet i figur 5.4 framkommer slik:

- Asymptotene ved *lave* frekvenser, dvs. for  $\omega$  mindre enn knekkfrekvensen  $\omega_k$ , finnes ved å sette  $\omega \ll \omega_k$  i  $|H(j\omega)|$  hhv.  $\arg H(j\omega)$ . Vi finner da at

$$|H(j\omega)|_{\text{as}} = K \quad (5.41)$$

og

$$\arg H(j\omega)_{\text{as}} = 0 \text{ [rad]} = 0^\circ \quad (5.42)$$

- Asymptotene for *høye* frekvenser, dvs. for  $\omega$  større enn knekkfrekvensen  $\omega_k$ , finnes ved å sette  $\omega \gg \omega_k$  i  $|H(j\omega)|$  hhv.  $\arg H(j\omega)$ . Vi finner

$$|H(j\omega)|_{\text{as}} = \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_k}} = \frac{\omega_k}{\omega} = 20 \log \omega_k \text{ dB} - 20 \log \omega \text{ dB} \quad (5.43)$$

og

$$\arg H(j\omega)_{\text{as}} = -\frac{\pi}{2} \text{ [rad]} = -90^\circ \quad (5.44)$$

$|H(j\omega)|_{\text{as}}$  i dette frekvensområdet, altså for  $\omega > \omega_k$ , har *stigningstall* lik  $-1$  siden den deriverte av  $|H(j\omega)|_{\text{as}}$  mhp.  $\omega$  er  $-1$ . Stigningstallet angis alternativt som  $-20$  dB/dekade (dekade er her dekade av frekvensen  $\omega$ ).

Merk at vi kan finne asymptotene også uten å skrive opp uttrykkene for frekvensresponsen. Det er bare å betrakte “store” og “små”  $s$  i transferfunksjonen (5.59) og deretter sette  $s = j\omega$ .

La oss bruke (5.39) og (5.40) til å regne ut verdiene for (den tilfeldig valgte) frekvensen  $\omega = 3$  rad/s. Vi antar at  $K = 1$  og  $T = 1$ . (5.39) gir

$$|H(j3)| = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316 = -20 \log_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = -10,0 \text{ dB} \quad (5.45)$$

(5.40) gir

$$\arg H(j3) = -\arctan(3) = -1,25 \text{ rad} = -71,6 \text{ grader} \quad (5.46)$$

som stemmer med avlesning i figur 5.4.

[Slutt på eksempel 41]

Neste eksempel viser hvordan frekvensresponsen kan finnes for en transferfunksjon som består av flere faktorer i telleren og/eller nevneren.

#### **Eksempel 42** *Frekvensresponsen for en (mer komplisert) transferfunksjon*

Gitt transferfunksjonen

$$H(s) = K \frac{T_1 s + 1}{(T_2 s + 1) s} e^{-\tau s} \quad (5.47)$$

(Leddet  $e^{-\tau s}$  representerer en tidsforsinkelse på  $\tau$  sek., jf. kap 4.6.) Vi setter  $s = j\omega$  i  $H(s)$  og setter deretter de enkelte faktorene på *polarform*, som så kombineres slik at vi ender opp med en polarform for  $H(j\omega)$ :

$$H(j\omega) = K \frac{T_1 j\omega + 1}{(T_2 j\omega + 1) j\omega} e^{-\tau j\omega} \quad (5.48)$$

$$= K \frac{\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2} e^{j \arctan\left(\frac{T_1 \omega}{1}\right)}}{\left[ \sqrt{1 + (T_2 \omega)^2} e^{j \arctan\left(\frac{T_2 \omega}{1}\right)} \right] \left[ \sqrt{0^2 + \omega^2} e^{j \frac{\pi}{2}} \right]} e^{-\tau j\omega} \quad (5.49)$$

$$= \underbrace{\frac{K \sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}}{\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2} \omega}}_{|H(j\omega)|} e^{j \underbrace{\left[ \arctan(T_1 \omega) - \arctan(T_2 \omega) - \frac{\pi}{2} - \tau \omega \right]}_{\arg H(j\omega)}} \quad (5.50)$$

[Slutt på eksempel 42]

Merk at faseasymptoter ikke kan finnes for en transferfunksjon som inneholder tidsforsinkelsesleddet  $e^{-\tau s}$  (men amplitudeasymptoter kan finnes) siden argumentet (vinkelen)  $\tau \omega$  [rad] for leddet  $e^{-\tau j\omega}$  ikke konvergerer mot noen endelig verdi når  $\omega \rightarrow \infty$ .

### 5.4.2 Resulterende frekvensrespons for multipliserte transferfunksjoner

I noen sammenhenger (bl.a. ved design av filterfunksjoner og reguleringsystemer) er det hensiktsmessig å finne frekvensresponsen for den totale transferfunksjonsmodellen ved å kombinere frekvensresponsene for de enkelte deltransferfunksjonene i en faktorisert modell. Deltransferfunksjonene kan representere de enkelte filterfunksjonene i et system av koplede filterfunksjoner eller de enkelte transferfunksjonene i en reguleringsløyfe.

Anta at den totale transferfunksjonsmodellen er faktorisert slik:

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)H_3(s)\dots \quad (5.51)$$

Forsterkningsfunksjonen er da gitt ved

$$|H(j\omega)| = |H_1(j\omega)||H_2(j\omega)||H_3(j\omega)| \dots \quad (5.52)$$

eller, når vi regner i dB (som er en logaritmisk enhet):

$$|H(j\omega)| \text{ [dB]} = |H_1(j\omega)| \text{ [dB]} + |H_2(j\omega)| \text{ [dB]} + |H_3(j\omega)| \text{ [dB]} + \dots \quad (5.53)$$

Fasefunksjonen blir

$$\arg H(j\omega) = \arg H_1(j\omega) + \arg H_2(j\omega) + \arg H_3(j\omega) + \dots \quad (5.54)$$

(5.52) og (5.54) følger av regnereglene for komplekse tall, jf. vedlegg A. Vi kan altså ganske enkelt *summere* forsterkningsfunksjonene (når de er angitt med dB som enhet) og fasefunksjonene for de enkelte deltransferfunksjonene. Den resulterende asymptotiske frekvensresponsen kan på samme måte finnes ved å summere den asymptotiske frekvensresponsen for de enkelte leddene (faktorene).

### Eksempel 43 *Resulterende frekvensrespons for multipliserte transferfunksjoner*

Et 1. ordens lavpassfilter (med båndbredde 1 rad/s) har transferfunksjonen

$$H_1(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_b} + 1} = \frac{1}{s + 1} \quad (5.55)$$

der  $\omega_b$  er båndbredden (begrepet båndbredde defineres i kap. 5.5). En enkel måte å lage 2. ordens lavpassfilter på, er å seriekople to 1. ordens lavpassfiltere, se figur 5.5. Den resulterende transferfunksjonen framkommer som produktet

$$H(s) = H_1(s)H_1(s) = \left( \frac{1}{\frac{s}{\omega_b} + 1} \right)^2 \quad (5.56)$$

Ihht. (5.52) blir da forsterkningsfunksjonen

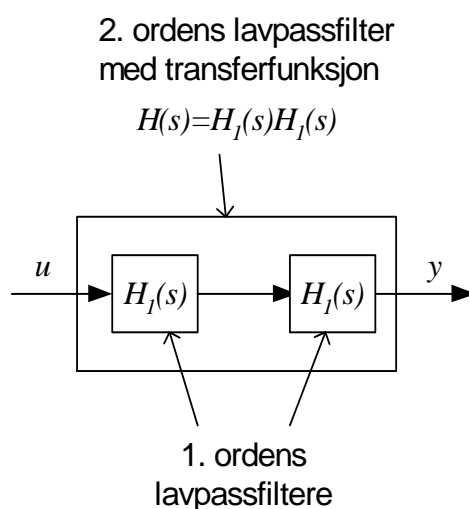
$$|H(j\omega)| \text{ [dB]} = |H_1(j\omega)| \text{ [dB]} + |H_1(j\omega)| \text{ [dB]} \quad (5.57)$$

og ihht. (5.54) blir fasefunksjonen

$$\arg H(j\omega) = \arg H_1(j\omega) + \arg H_1(j\omega) \quad (5.58)$$

Figur 5.6 viser frekvensresponsene for  $H_1(s)$  og for  $H(s)$  plottet i Bodediagram. Fra kurvene kan vi se at for hver frekvens gjelder summeuttrykkene (5.52) og (5.54).

[Slutt på eksempel 43]



Figur 5.5: Konstruksjon av 2. ordens lavpassfilter ved å seriekople to 1. ordens lavpassfiltere

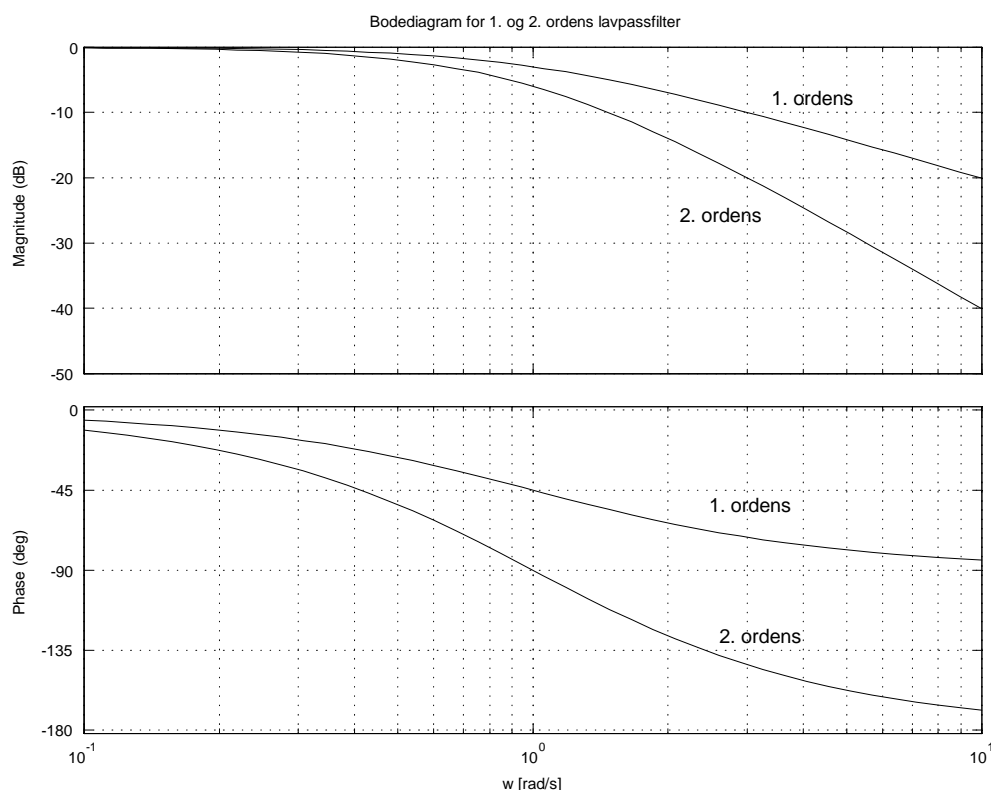
### 5.4.3 Verktøy for plotting av frekvensrespons ut fra transferfunksjon

MATLAB og LabVIEW har funksjoner for plotting av frekvensresponskurver ut fra transferfunksjoner.

## 5.5 Anvendelse av frekvensrespons: Filtere

### 5.5.1 Innledning

Et *signalfilter* – eller bare *filter* – brukes til å fjerne bestemte frekvenskomponenter (oftest støy) fra et signal. Eksempelvis brukes et lavpassfilter til å fjerne høyfrekvent støy (lavfrekvente komponenter passerer). Kunnskap om filterfunksjoner er sentralt innen signalbehandling, men er nyttig også innen bl.a. reguleringsteknikk siden reguleringssystemer kan betraktes som filtere: Det er kun bestemte frekvenskomponenter i referansen som den regulerte prosessutgangen vil klare å følge, og det er kun bestemte frekvenskomponenter i prosessforstyrrelsen som reguleringssystemet klarer å kompensere for, dvs. klarer å “filtrere vekk”. Kunnskap om filtere kan også være nyttig ved analyse av fysiske prosesser. F.eks. fungerer en blandetank i en prosessstreng som et lavpassfilter for



Figur 5.6: Frekvensresponsen for  $H_1(s)$  (1. ordens) gitt ved (5.55) og for den sammensatte  $H(s) = H_1(s) \cdot H_1(s)$  (2. ordens)

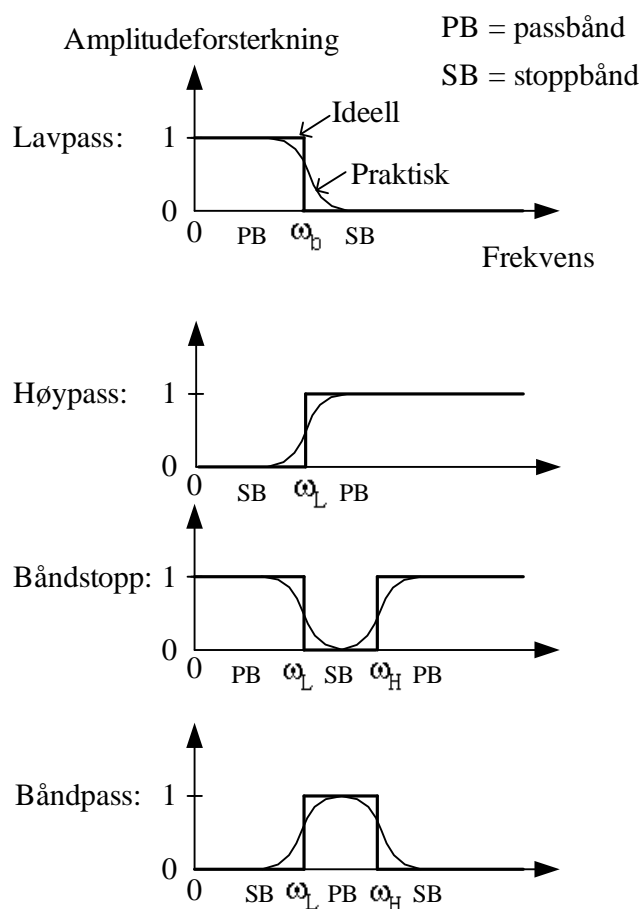
komponenter eller temperaturen i massestrømmen i prosessstrengen.

I dette underkapitlet skal vi spesielt studere *lavpassfiltere*, som er den mest brukte filterfunksjonen, men også se litt på *høypassfiltere*. *Båndpassfiltere* og *båndstoppfiltere* berøres såvidt.

Signalfiltere kan implementeres ved hjelp av analog elektronikk eller ved hjelp av formler som kan programmeres. Utvikling av programmerbare filterfunksjoner beskrives på side 156.

Figur 5.7 viser indikerer både den ideelle og den praktiske *filterkarakteristikken* eller frekvensresponsen for de forskjellige filtertypene, se (kun forsterkningskurvene er vist, ikke fasekurvene). Det kan vises at transferfunksjonen for ideelle filtere vil måtte ha uendelig høy orden. Ideelle filtere kan derfor ikke realiseres, verken med analog elektronikk eller med filterprogrammer. Forsterkningskurvene knekker i *knekkfrekvensen*( $e$ ). *Passbåndet* er det frekvensområdet der forsterkningsfunksjonen ideelt sett





Figur 5.7: Ideelle og praktiske forsterkningskurver for forskjellige typer filtere. Kurvene knekker i knekkfrekvensen(e).

har verdi 1 (frekvenskomponentene i dette frekvensområdet slipper uendret igjennom). *Stoppbåndet* er det frekvensområdet der forsterkningsfunksjonen ideelt sett er 0 (frekvenskomponentene i dette frekvensområdet slipper ikke igjennom).<sup>4</sup>

[11] er en grundig og praktisk referanse for signalbehandling, inkl. analyse og design av filtere.

<sup>4</sup>Det er litt synd at lavpassfiltere ikke i stedet er blitt kalt *høystoppfiltere*, for det er nettopp det å stoppe høyfrekvente komponenter som er lavpassfilterets hovedoppgave. Tilsvarende burde høypassfiltere hete lavstoppfiltere, men nå er det for sent...

## Verktøy for filterdesign

Både MATLABs Signal Processing Toolbox og LabVIEW har mange funksjoner for design av signalfiltere. Et eget dokument som er tilgjengelig fra denne bokas hjemmeside på <http://techteach.no>, beskriver noen av de mest aktuelle funksjonene.

### 5.5.2 Lavpassfiltere

#### 1. ordens lavpassfiltere

Transferfunksjonen for et 1. ordens lavpassfilter med inngangssignal  $u$  og utgangssignal  $y$  skrives gjerne på formen

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_b} + 1} \quad (5.59)$$

der  $\omega_b$  [rad/s] kalles *båndbredden*. Dette er en 1. ordens transferfunksjon med forsterkning  $K = 1$  og tidskonstant  $T = 1/\omega_b$ , jf. (4.12).

Frekvensresponsen er

$$H(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_b} + 1} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 + 1} e^{j \arctan \frac{\omega}{\omega_b}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 + 1}} e^{j\left(-\arctan \frac{\omega}{\omega_b}\right)} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Forsterkningsfunksjonen er altså

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 + 1}} \quad (5.62)$$

og fasefunksjonen er

$$\arg H(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_b} \quad (5.63)$$



Figur ?? side ?? viser eksakte (og asymptotiske) kurver for  $|H(j\omega)|$  og  $\arg H(j\omega)$  tegnet i et Bodediagram. I figuren er  $K = 1$  og  $\omega_k = \omega_b$ .



Filterets *båndbredde* angir øvre grense for passbåndet. Det er vanlig å si at båndbredden er gitt ved at filterforsterkningen der er  $1/\sqrt{2} = 0,71 = -3$  dB (ovenfor båndbredden er forsterkningen mindre enn dette). Denne båndbredden kan derfor betegnes “ $-3$  dB-båndbredden”. Hva blir  $-3$  dB-båndbredden for et 1. ordens lavpassfilter? Vi finner båndbredden som  $\omega$ -løsningen til

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.64)$$

Løsningen er  $\omega = \omega_b$ . *Båndbredden er altså  $\omega_b$  [rad/s] der  $\omega_b$  er gitt i (5.59). I Hertz er båndbredden*

$$f_b = \frac{\omega_b}{2\pi} \quad (5.65)$$

Fra sammenhengen  $T = 1/\omega_b$  ser vi at jo større tidskonstanten er, jo mindre blir båndbredden. Det stemmer rimelig godt med hva vi fant i kap. 4.4: Jo større tidskonstant, jo tregere system. Et tregt system reagerer jo ikke på hurtige signalvariasjoner, så lavpasskarakteren blir mer dominerende.

Hva er *responstiden*  $T_r$  for et 1. ordens lavpassfilter? For 1. ordens systemer er  $T_r$  lik tidskonstanten  $T$ . Vi får da

$$T_r = T = \frac{1}{\omega_b} \quad (5.66)$$

La oss se på en LabVIEW-simulator for et 1. ordens lavpassfilter. Figur 5.8 viser frontpanelet for en simulator der inngangssignalet til filteret består av en sum av to sinus- eller frekvenskomponenter med frekvens mindre enn hhv. større enn filterets båndbredde. Fra tidsresponsen ser vi at den lavfrekvente komponenten passerer tilnærmet uendret, mens den høyfrekvente komponenten blir dempet gjennom filteret.

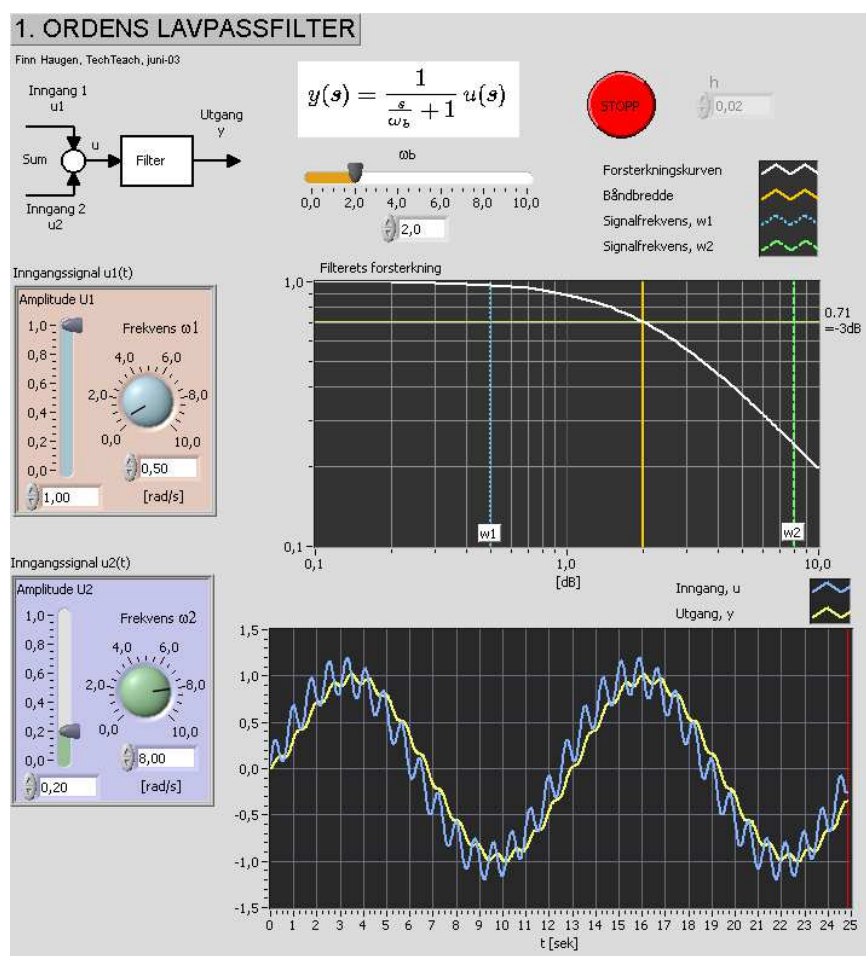
#### Eksempel 44 *RC-kretsen som lavpassfilter*

I eksempel 6 side 35 utviklet vi følgende modell for en RC-krets:

$$RC\dot{v}_2(t) = v_1(t) - v_2(t) \quad (5.67)$$

Transferfunksjonen fra inngangsspenningen  $v_1$  til utgangsspenningen  $v_2$  blir

$$\frac{v_2(s)}{v_1(s)} = H(s) = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_b} + 1} \quad (5.68)$$



Figur 5.8: Simulator for 1. ordens lavpassfilter der inngangssignalet består av en sum av to frekvenskomponenter

RC-kretsen er altså et 1. ordens lavpassfilter med båndbredde

$$\omega_b = \frac{1}{RC} \text{ rad/s} \quad (5.69)$$

Hvis f.eks.  $R = 1\text{k}\Omega$  og  $C = 10\mu\text{F}$ , blir båndbredden  $\omega_b = 1/RC = 100$  rad/s.

[Slutt på eksempel 44]

#### Eksempel 45 *Væsketank som lavpassfilter*

I eksempel 3 side 24 utviklet vi følgende modell for en væsketank med oppvarming:

$$c\rho V\dot{T} = P + cw(T_i - T) \quad (5.70)$$

Transferfunksjonen fra innløpstemperaturen  $T_i$  til tanktemperaturen  $T$  er

$$\frac{T(s)}{T_i(s)} = H(s) = \frac{1}{\frac{\rho V}{w}s + 1} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_b} + 1} \quad (5.71)$$

som representerer et 1. ordens lavpassfilter med båndbredde

$$\omega_b = \frac{w}{\rho V} \text{ rad/s} \quad (5.72)$$

Tanken vil altså virke dempende på temperaturvariasjoner i innløpet. (5.72) kan brukes til design av tanken.

[Slutt på eksempel 45]

## Høyere ordens lavpassfiltere

Ovenfor hadde filteret (dets transferfunksjon) orden  $n = 1$ . Filtere av høyere orden vil kunne få en forsterkningsfunksjon som ligger nærmere den ideelle karakteristikken vist i figur 5.7. (Ulempen ifm. realisering av filteret er at høyere orden krever flere elektroniske komponenter eller at filtereralgoritmen blir noe mer omfattende å programmere, samt at det blir en økt faseforskyvning gjennom filteret.) Høyere ordens lavpassfiltere kan ha både et tellerpolynom og et nevnerpolynom i  $s$ , som i såkalte Chebyshevfiltere. I Butterworthfiltere er tellerpolynomet kun 1.<sup>5</sup>

Vi skal her se på et 2. ordens Butterworthfilter, som kan beskrives med transferfunksjonen

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_b}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_b} + 1} \quad (5.73)$$

der  $\zeta$  har verdien  $1/\sqrt{2} = 0,707$ . Frekvensresponsen blir

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_b}\right)^2 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_b} + 1} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_b^2} + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_b}} \quad (5.74)$$

<sup>5</sup>Butterworthfiltere har den egenskapen at av alle filtere av samme orden, har slike filtere den flateste forsterkningskurven i passbåndet. Chebyshevfiltere har den egenskapen at av alle filtere av samme orden, har dette filteret den skarpeste passbåndbegrensningen. Imidlertid har Chebyshevfiltere resonanstopper passbånd.

Forsterkningsfunksjonen blir

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_b^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2}} \quad \text{med } \zeta = 1/\sqrt{2} \quad (5.75)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2}} \quad (5.76)$$

Fasefunksjonen blir

$$\arg H(j\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_b}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_b^2}} \quad \text{med } \zeta = 1/\sqrt{2} \quad (5.77)$$

$$= -\arctan \frac{\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_b}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_b^2}} \quad [\text{rad}] \quad (5.78)$$

Fra (5.76) finner vi at

$$|H(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71 = -3 \text{ dB} \quad (5.79)$$

Altså er  $\omega_b$  i (5.74) filterets  $-3$ -dB-båndbredde.

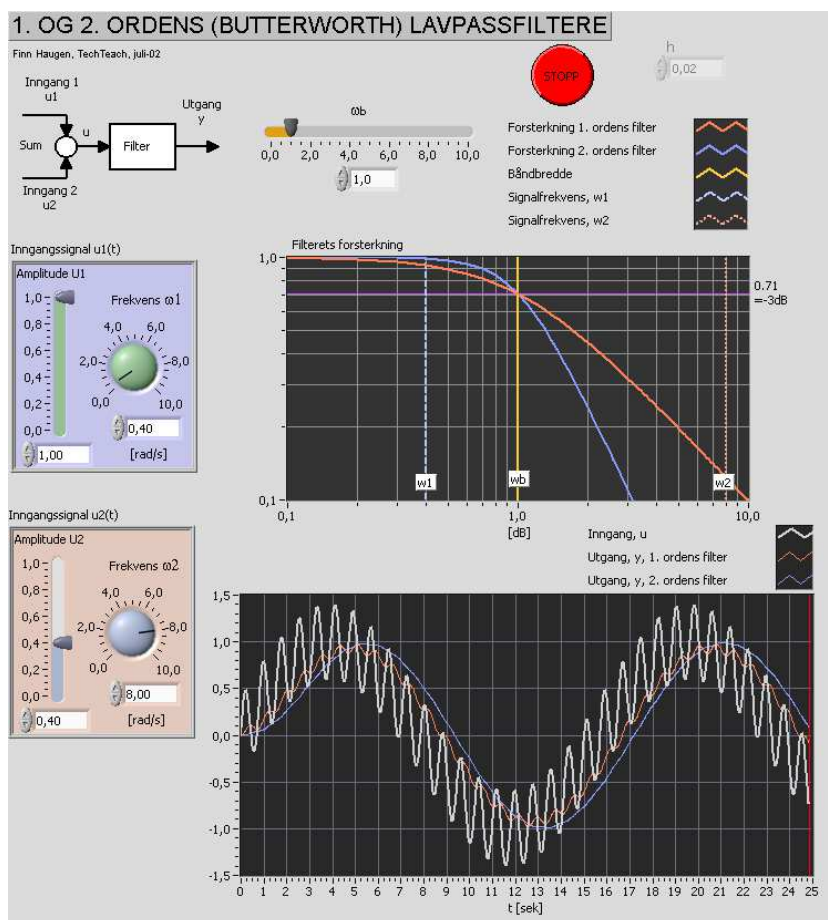
Responstiden  $T_r$  for et høyere ordens filter er tilnærmet

$$T_r \approx \frac{1,5}{\omega_b} \quad (5.80)$$

Figur 5.9 viser frontpanelet for en LabVIEW-simulator som simulerer og tegner forsterkningskurven for et 1. ordens lavpassfilter og et 2. ordens lavpassfilter samtidig. Filterne har samme båndbredde. Inngangssignalet til filterene består av en sum av to frekvenskomponenter med frekvens mindre enn hhv. større enn filterets båndbredde. Fra tidsresponsen ser vi at 2. ordens filteret filtrerer den høyfrekvente komponenten bedre enn 1. ordens filteret gjør. Dette er i overensstemmelse med forsterkningskurvene vist på frontpanelet.

### 5.5.3 Utvikling av andre typer filterfunksjoner med frekvenstransformasjon

Med såkalt *frekvenstransformasjon* kan vi finne transferfunksjonen for høypass-, båndpass- eller båndstoppfiltere med utgangspunkt i en gitt transferfunksjon for et lavpassfilter. Tabell 5.2 viser



Figur 5.9: Frontpanelet for en LabVIEW-simulator som simulerer og tegner forsterkningskurven for et 1. ordens lavpassfilter og et 2. ordens lavpassfilter samtidig

frekvenstransformasjonene. I tabellen er  $\omega_L$  og  $\omega_H$  henholdsvis laveste og høyeste knekkfrekvens, jf. figur 5.7. Utgangspunktet for transformasjonene er transferfunksjonen for et normalisert lavpassfilter, som er et lavpassfilter med knekkfrekvens eller båndbredde 1 rad/s. Lavpassfilteret kan være et normalisert 1. ordens filter:

$$H(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (5.81)$$

eller et normalisert 2. ordens (Butterworth-)filter:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (5.82)$$

Resulterende filtertype	Frekvenstransformasjon
Høypassfilter	$s \rightarrow \frac{\omega_L}{s}$
Båndpassfilter	$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_L \omega_H}{s(\omega_H - \omega_L)}$
Båndstoppfilter	$s \rightarrow \frac{s(\omega_H - \omega_L)}{s^2 + \omega_L \omega_H}$

Tabell 5.2: Frekvenstransformasjoner med utgangspunkt i et normalisert lavpassfilter.  $\omega_L$  og  $\omega_H$  er henholdsvis laveste og høyeste knekkfrekvens.

Jo høyere orden av lavpassfilteret, jo høyere orden får det resulterende filteret.

#### Eksempel 46 *Utvikling av 1. ordens høypassfilter*

Vi skal finne transferfunksjonen  $H_{\text{HP}}(s)$  for et 1. ordens høypassfilter med knekkfrekvens (nedre grense for passbåndet)  $\omega_L = 10$  rad/s. Ihht. tabell 5.2 erstatter vi da  $s$  i (5.81) med  $\omega_L/s$ , hvilket gir

$$H_{\text{HP}}(s) = \frac{1}{\frac{\omega_L}{s} + 1} = \frac{\frac{s}{\omega_L}}{\frac{s}{\omega_L} + 1} = \frac{\frac{s}{10}}{\frac{s}{10} + 1} \quad (5.83)$$

Frekvensresponsen  $H_{\text{HP}}(j\omega)$  er plottet i et Bodediagram i figur 5.10. Asymptoter er inntegnet.

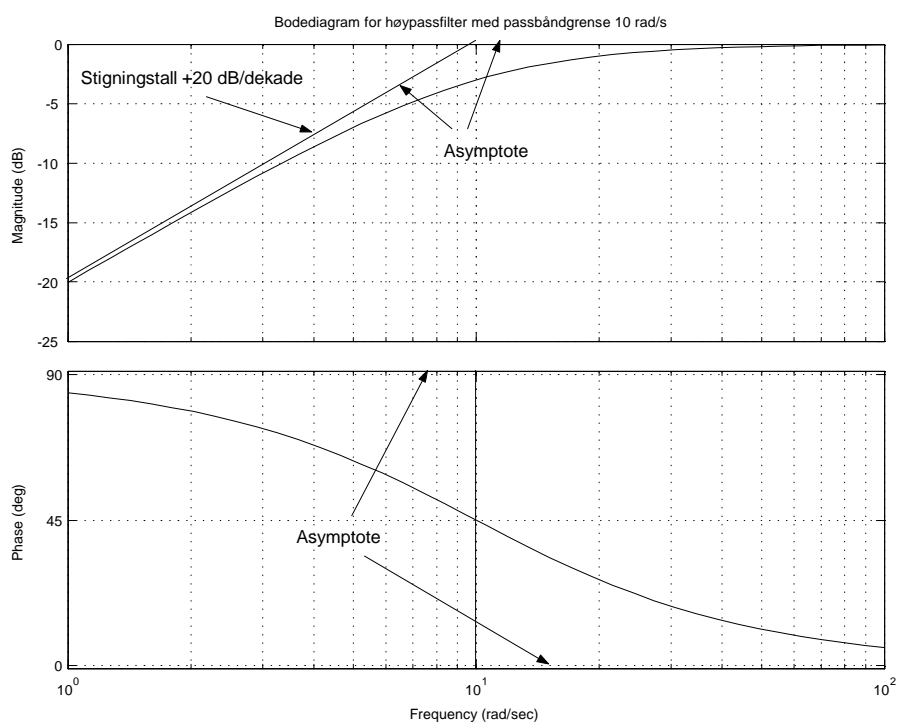
[Slutt på eksempel 46]

### 5.5.4 Utvikling av tidsdiskrete filtere

Vi har nå lært å utvikle filterfunksjoner, som lavpassfilter og høypassfilter, i form av transferfunksjoner. Vi skal nå se litt på hvordan en filterfunksjon kan realiseres som en formel som kan programmeres (i et hvilket som helst programspråk). Programmet skal beregne filterutgangen  $y$  ved hvert tidsskritt som funksjon av bl.a. filterinngangen  $u$ . Vi skal mao. finne en tidsdiskret filterfunksjon med utgangspunkt i en tidskontinuerlig filterfunksjon, som  $s$ -transferfunksjoner er. Dette kalles *diskretisering*.

Vi kan faktisk bruke de samme metodene for diskretisering av filterfunksjoner som vi brukte for numerisk beregning av tidsresponser for tidskontinuerlige modeller i kap. 3, dvs. Eulers metode og Runge-Kuttas 2. ordens metode. Ved diskretisering av filtere er det imidlertid vanlig å bruke en metode som kalles *bilinær transformasjon*. (Det kan vises at metoden er ekvivalent med bruk av trapesintegrasjon for løsning av





Figur 5.10: Frekvensresponsen for et 1. ordens høypassfilter med knekkfrekvens (nedre grense for passbåndet)  $\omega_L = 10$  rad/s

differensiallikninger [6].) Bilineær transformasjon innebærer at Laplacevariabelen  $s$  i filterets transferfunksjon substitueres med følgende uttrykk:

$$s \longleftarrow \frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (5.84)$$

der  $h$  [sek] er tidsskrittets lengde eller samplingsintervallet og  $z$ -variabelen er en tidsforskyvningsoperator, som virker slik: Multiplikasjon med  $z^{-1}$  betyr tidsforsinkelse med ett tidsskritt:

$$z^{-1}x(t_k) = x(t_{k-1}) \quad (5.85)$$

Tilsvarende betyr multiplikasjon med  $z^{-2}$  tidsforsinkelse med 2 tidsskritt, osv.  $k$  er tidsindeksen, jf. figur 3.5. Multiplikasjon med  $z$  betyr tidsframskyvning med ett tidsskritt:  $zx(t_k) = x(t_{k+1})$ .

#### Eksempel 47 1. ordens tidsdiskret lavpassfilter

Vi skal som eksempel finne den tidsdiskrete filterfunksjonen svarende til

den 1. ordens filterfunksjonen

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_b} + 1} \quad (5.86)$$

Vi bruker substitusjonen (5.84):

$$\frac{y(t_k)}{u(t_k)} = \frac{1}{\frac{\frac{2}{h} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\omega_b} + 1} = \frac{1}{\frac{2}{\omega_b h} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} \quad (5.87)$$

$$= \frac{\omega_b h (1+z^{-1})}{(\omega_b h + 2) + (\omega_b h - 2) z^{-1}} \quad (5.88)$$

som ordnet gir

$$(\omega_b h + 2) y(t_k) + (\omega_b h - 2) z^{-1} y(t_k) = \omega_b h u(t_k) + \omega_b h z^{-1} u(t_k) \quad (5.89)$$

som med bruk av (5.85) gir

$$(\omega_b h + 2) y(t_k) + (\omega_b h - 2) y(t_{k-1}) = \omega_b h u(t_k) + \omega_b h u(t_{k-1}) \quad (5.90)$$

som ordnet gir

$$y(t_k) = -\frac{(\omega_b h - 2)}{(\omega_b h + 2)} y(t_{k-1}) + \frac{\omega_b h}{(\omega_b h + 2)} [u(t_k) + u(t_{k-1})] \quad (5.91)$$

som er den tidsdiskrete filterfunksjonen, som skal beregnes én gang for hvert tidsskritt. Den angir en formel for beregning av filterutgangen  $y(t_k)$  som funksjon av filterinngangen for nåværende tidsskritt,  $u(t_k)$ , filterinngangen for forrige tidsskritt,  $u(t_{k-1})$ , og filterutgangen for forrige tidsskritt,  $y(t_{k-1})$ .

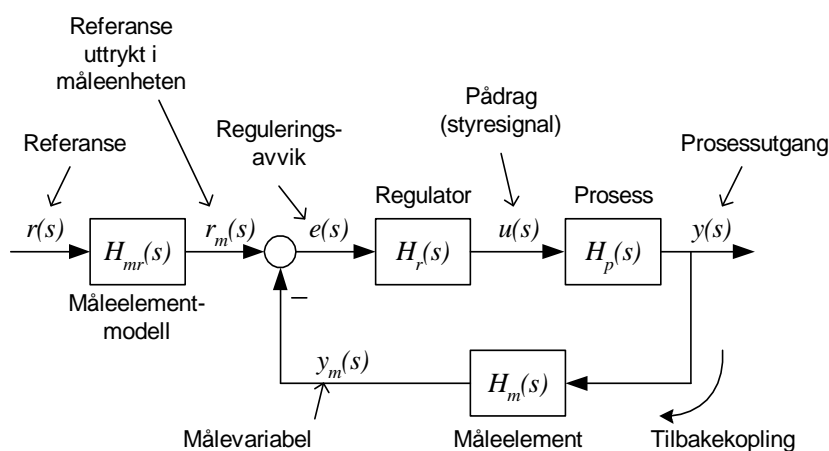
[Slutt på eksempel 47]

Det er viktig at tidsskrittet  $h$  er lite i forhold til filterets responstid  $T_r \approx 1/\omega_b$ , ellers kan den tidsdiskrete filterfunksjonen få ganske forskjellige egenskaper fra den opprinnelige tidskontinuerlige filterfunksjonen. En håndregel er

$$h \leq \frac{1}{5} T_r = \frac{1}{5\omega_b} \quad (5.92)$$

## 5.6 Anvendelse av frekvensrespons: Analyse av reguleringsystemer

Reguleringsystemer kan analyseres mhp. frekvensrespons på basis av en transferfunksjonsmodell for reguleringsystemet. Den mest aktuelle



Figur 5.11: Blokkdiagram for reguleringsystem

transferfunksjonen å analysere er transferfunksjonen fra referansen  $r$  til prosessutgangen  $y$ . Figur 5.11 viser et blokkdiagram for et tilbakekoplet reguleringsystem. Vi kan finne at transferfunksjonen fra  $r$  til  $y$  er

$$H_{yr}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{H_{mr}(s)H_r(s)H_p(s)}{1 + H_m(s)H_r(s)H_p(s)} \quad (5.93)$$

Vi kan nå tegne Bodediagram for  $H_{yr}(s)$  og bl.a. finne  $-3\text{dB}$ -båndbredden fra forsterkningskurven. Prosessutgangen  $y$  vil følge frekvenskomponenter i referansen med frekvens under båndbredden på en (grovt sett) "tilfredsstillende" måte, mens  $y$  ikke vil kunne følge mer høyfrekvente komponenter i  $r$ .

Reguleringsystemets responstid kan anslås fra

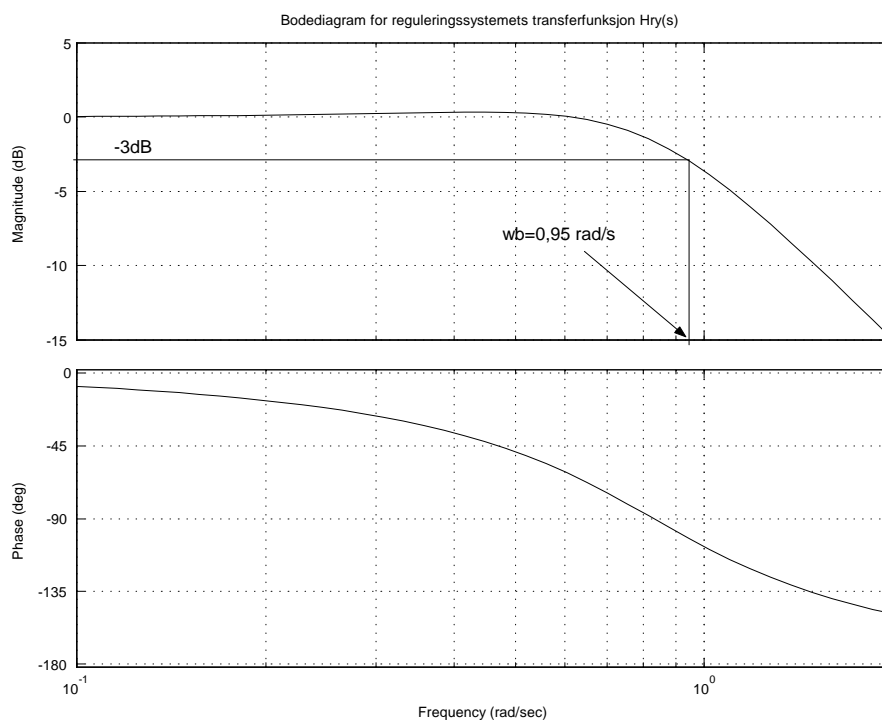
$$T_r \approx \frac{1,5}{\omega_b} \quad (5.94)$$

#### Eksempel 48 *Frekvensresponsanalyse av posisjonsreguleringsystem*

I eksempel 38 side 121 fant vi følgende transferfunksjon fra referansen  $r$  til vinkelposisjonen  $y$  for et reguleringsystem for vinkelposisjonen for en motor:

$$H_{yr}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\overbrace{K_p}^{0,69}}{s^2 + s + \underbrace{K_p}_{0,69}} \quad (5.95)$$

Vi skal finne reguleringsystemets  $-3$  dB-båndbredde  $\omega_b$  fra Bodediagrammet for  $H_{yr}(s)$ , som er vist i figur 5.12. Fra forsterkningskurven leser vi av  $\omega_b = 0,95$  rad/s. Dette betyr at motorens vinkelposisjon vil følge frekvenskomponenter i referansen med frekvens under båndbredden på en grovt sett “tilfredsstillende” måte, mens posisjonen ikke vil kunne følge mer høyfrekvente komponenter.



Figur 5.12: Bodediagram for reguleringsystemets transferfunksjon  $H_{yr}(s)$  gitt ved (5.95). Båndbredden  $\omega_b$  er angitt.

Reguleringsystemets responstid er ca.  $T_r = 1,5/0,95 = 1,6$  sek, jf. (5.94), som stemmer noenlunde med responsen vist i figur 4.12 side 124.

[Slutt på eksempel 48]