

Kapittel 6

Stabilitetsanalyse

6.1 Innledning

I noen sammenhenger er det ønskelig å undersøke om, eller betingelsene for at, et system er stabilt eller ustabil. Spesielt innen reguleringsteknikken er stabilitetsanalyse viktig, for tilbakekoblede reguleringsystemer kan bli ustabile ved feilaktig valg av regulatorparametrene (vi skal se dette i et eksempel). Vi skal nå definere de ulike stabilitetsegenskapene og knytte dem til plasseringen som systemets poler eller egenverdier har i det komplekse plan.

Tradisjonelt har Rouths stabilitetskriterium vært undervist i forbindelse med stabilitetsanalyse. Rouths stabilitetskriterium er enkelt sagt en metode for å finne for hvilke parameterverdier et system er stabilt eller ikke, uten å måtte regne ut systemets poler eller egenverdier (som bestemmer stabilitetsegenskapene, som vi skal se nedenfor). Jeg har et klart inntrykk av at metoden i praksis ikke spiller noen sentral rolle ved stabilitetsanalyse av dynamiske systemer, og derfor har jeg¹ valgt å ikke beskrive metoden i denne boken (en referanse er [5]).

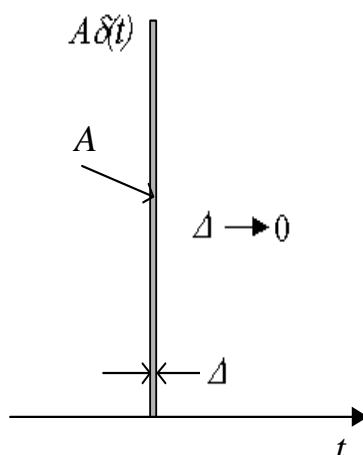
Det fins en spesiell grafisk metode — Nyquists stabilitetskriterium — for stabilitetsanalyse for tilbakekoblede systemer (som reguleringsystemer) basert på systemets frekvensrespons. Denne metoden blir ikke presentert i denne boken, siden den er så nær knyttet til tilbakekoblede systemer. De analysemetodene vi skal se på i dette kapitlet, er generelle, dvs. at de kan anvendes på alle dynamiske systemer, uansett om de er tilbakekoblede eller ikke.

¹Med litt tungt hjerte

6.2 Impulsrespons og stabilitetsegenskaper

Det er flere måter å definere stabilitetsegenskaper på. Vi velger en definisjon som er basert på systemets *impulsrespons*. Impulsresponsen er tidsresponsen i systemets utgangsvARIABLET etter at det er satt en *impuls* på inngangen. En fordel med å basere definisjonen på impulsresponsen, er at det er nokså enkelt å knytte stabilitetsegenskapene til systemets *poler* (impulsresponsen og polene er nært knyttet sammen), som vi snart skal se.

Noen ord om selve impulssignalet: En impuls er et tidssignal som i prinsippet har uendelig kort varighet og uendelig amplitude, men slik at integralet av signalet, dvs. arealet under signalets tidsfunksjon, er endelig. Arealet betegnes også *styrke*. En impuls med styrke 1 kalles enhetsimpuls og betegnes $\delta(t)$. Firkantpulsene i figur 6.1 går mot å bli en impulsfunksjon dersom størrelsen Δ går mot 0.



Figur 6.1: Firkantpulsene går mot å bli en impulsfunksjon (med uendelig høyde) når størrelsen Δ reduseres til 0. A kalles impulsens styrke. $\delta(t)$ er enhetsimpulsfunksjonen (styrke 1).

Så til stabilitetsdefinisjonene: Et systems mulige stabilitetsegenskaper kan defineres ut fra dets impulsrespons $h(t)$, slik:

- **Asymptotisk stabilt system:** Den stasjonære impulsresponsen er 0:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0 \quad (6.1)$$

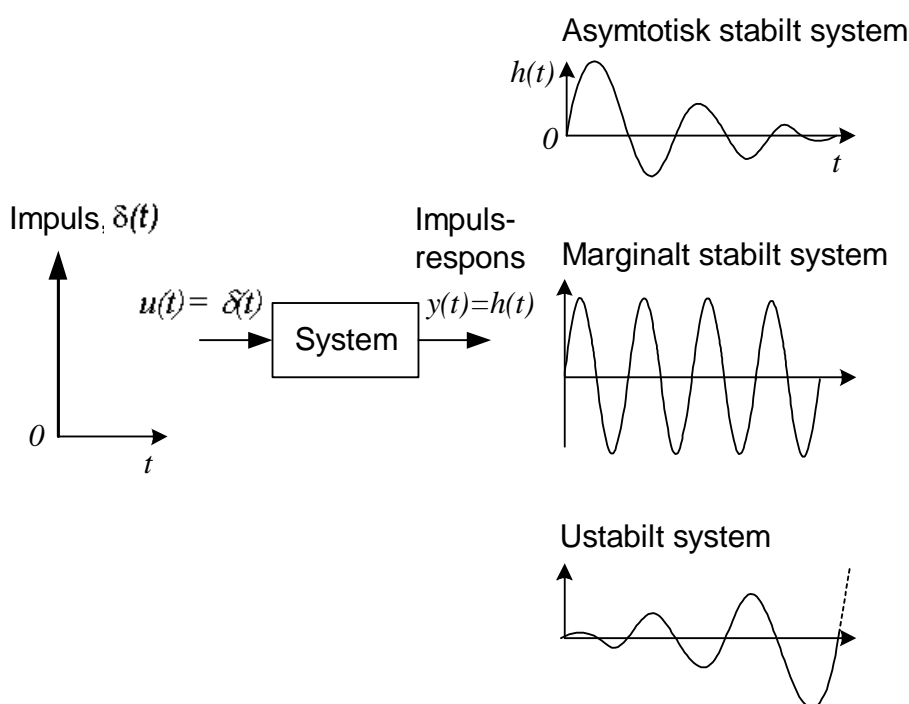
- **Marginalt stabilt system:** Den stasjonære impulsresponsen er forskjellig fra null, men begrenset:

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < \infty \quad (6.2)$$

- **Ustabilt system:** Den stasjonære impulsresponsen er ubegrenset:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty \quad (6.3)$$

Et system er *stabilt* hvis det er enten asymptotisk stabilt eller marginalt stabilt. Figur 6.2 gir en illustrasjon av de ulike stabilitetsegenskapene.



Figur 6.2: Illustrasjon av de ulike stabilitetsegenskapene

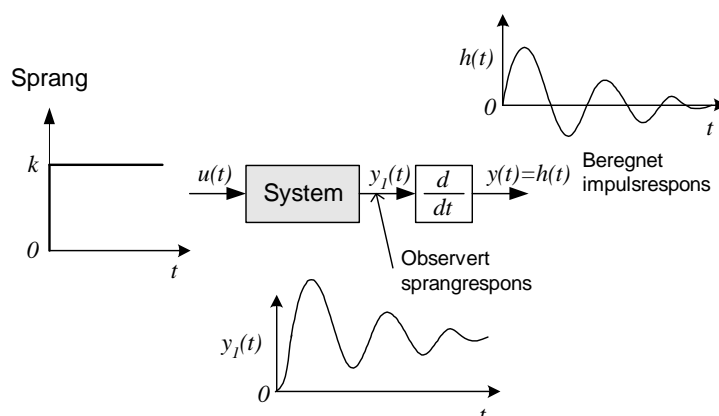
I definisjonen ovenfor er det antatt at impulsen i u starter fra verdi 0 og at impulsresponsen i y har startverdi 0. I praksis kan disse initielle verdiene være konstanter forskjellig fra null, svarende til at systemet initielt er i et annet arbeidspunkt enn “nullarbeidspunktet”.

Et problem med den ideelle impulsfunksjonen er at den ikke kan genereres fullt ut i praksis. Dersom vi virkelig skal utføre et eksperiment med impuls

som inngangssignal, kan vi tilnærme impulsen med en firkantpuls, som i figur 6.1. Impulsresponsen blir da tilnærmet som med bruk av den ideelle impulsfunksjonen på inngangen.

6.3 Bruk av sprangrespons i stedet for impulsrespons

Sprang er mye brukt som inngangssignal i ulike sammenhenger. Et *sprang* er et fullt ut realiserbart signal. Siden et sprang er *integralet* av en impuls, kan vi finne impulsresponsen ved ganske enkelt å *derivere* sprangresponsen. Denne løsningen er vist i figur 6.3.



Figur 6.3: Impulsresponsen kan beregnes som den deriverte av sprangresponsen

Vi kan også bare observere sprangresponsen og konkludere om stabilitetsegenskapene ut fra denne, slik:

- **Asymptotisk stabilt system:** Den stasjonære sprangresponsen er en konstant som er forskjellig fra null, som sprangresponsen vist i figur 6.3.
- **Ustabil eller marginalt stabilt system:** Den stasjonære impulsresponsen er ubegrenset eller er begrenset, men ikke konstant². (Vi kunne ha analysert disse tilfellene nærmere for å skille mellom de to tilfellene ustabilitet og marginal stabilitet, men vi lar det være her

²som i sinussvingninger

fordi det oftest er tilstrekkelig bare å kunne skille mellom asymptotisk stabilitet på den ene siden og ustabilitet eller marginal stabilitet på den annen.)

6.4 Stabilitetsegenskaper og poler

Det kan være upraktisk å måtte utføre eksperimenter eller simuleringer for å få registrert impulsresponsen med formål å bestemme stabilitetsegenskapene. Det er oftest mest hensiktmessig å kunne fastslå systemets stabilitetsegenskap ved å analysere modellen. Vi skal nå se at det er en sammenheng mellom de forskjellige stabilitetsegenskapene og systemets *poler*. Grunnet denne sammenhengen kan vi fastslå stabilitetsegenskapene ved ganske enkelt å studere polene (mer presist: hvor i det komplekse plan de ligger).

Vi antar at systemets modell er i form av transferfunksjonen $H(s)$ fra u til y :

$$y(s) = H(s)u(s) \quad (6.4)$$

Inngangen u skal være en enhetsimpuls, dvs. $u(t) = \delta(t)$. Den Laplacetransformerte av $\delta(t)$ er 1, jf. (B.10). Vi betegner impulsresponsen for $h(t)$. Impulsresponsens Laplacetransformerte blir

$$h(s) = H(s)\mathcal{L}\{\delta(t)\} = H(s) \cdot 1 = H(s) \quad (6.5)$$

Impulsresponsens Laplacetransformerte er altså lik systemets transferfunksjon. Vi trenger $h(t)$, som de ulike stabilitetsegenskapene er definert ut fra. $h(t)$ kan beregnes vha. (3.181), som gjengis her:

$$h(t) = \sum_i \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s-p_i)^m \underbrace{H(s)}_{h(s)} e^{st} \right] \right\} \quad (6.6)$$

$$= \sum_i \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ (s-p_i) \underbrace{H(s)}_{h(s)} e^{st} \right\} \text{ dersom } m = 1 \quad (6.7)$$

$\{p_i\}$ er polene i $H(s)$, dvs. røttene i nevnerpolynomet i $H(s)$, og m er polenes multiplisitet (enkle poler har $m = 1$). Nevnerpolynomet i $H(s)$ kalles *det karakteristiske polynom*, $a(s)$. Polene er røttene i $a(s)$, dvs. at polene er løsningene i *den karakteristiske likning*

$$a(s) = 0 \quad (6.8)$$

Et eksempel: Gitt

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \quad (6.9)$$

$H(s)$ har polene $p_1 = -2$ og $p_2 = -3$, og det karakteristiske polynom er

$$a(s) = (s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6 \quad (6.10)$$

Vi skal nå bruke (6.6) og (6.7) til å knytte stabilitetsegenskapene til polplasseringen i det komplekse plan. La oss først anta at polene i $H(s)$ er enkle, dvs. ikke sammenfallende. Da er $m = 1$, og $h(t)$ er gitt ved (6.7). En pol er generelt et komplekst tall:

$$p_i = a_i + jb_i \quad (6.11)$$

der a_i er polens realdel og b_i er polens imaginærdel. (6.7) gir at $h(t)$ blir summen

$$h(t) = \sum_i h_i(t) \quad (6.12)$$

der

$$h_i(t) = k_i e^{p_i t} = k_i e^{(a_i + jb_i)t} = k_i e^{a_i t} e^{jb_i t} \quad (6.13)$$

Her er k_i en eller annen konstant. Leddet $e^{jb_i t}$ er et komplekst tall på enhets sirkelen og har derfor absoluttverdi 1.³ Det blir da leddet $e^{a_i t}$ som bestemmer den stasjonære ($t \rightarrow \infty$) absoluttverdien av delresponsen $h_i(t)$ i den totale impulsresponsen $h(t)$, ihht. følgende analyse:

- Anta at polens realdel a_i er strengt negativ, dvs. $a_i < 0$, dvs. at polen ligger i venstre halvplan. Da vil $e^{a_i t} \rightarrow 0$, og dermed vil $h_i(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$.
- Anta at polens realdel a_i er null, dvs. $a_i = 0$, dvs. at polen ligger på den imaginære akse. Da vil $e^{a_i t} = 1$, og dermed vil $h_i(t)$ gå mot en konstant verdi forskjellig fra null når $t \rightarrow \infty$.
- Anta at polens realdel a_i er strengt positiv, dvs. $a_i > 0$, dvs. at polen ligger i høyre halvplan. Da vil $e^{a_i t} \rightarrow \infty$, og dermed vil $h_i(t) \rightarrow \infty$ når $t \rightarrow \infty$.

Ut fra ovennevnte analyse kan vi konkludere som følger for systemer der polenes multiplisitet er 1: (1) Hvis alle polene ligger i venstre halvplan, er systemet *asymptotisk stabilt*, for da vil alle $h_i(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$. (2) Hvis

³Dersom en pol har imaginærdel b forskjellig fra null, vil det fins en tilhørende kompleks konjugert pol med imaginærdel $-b$. Dette påvirker ikke analysen.

én pol ligger på imaginæraksen, mens resten av polene ligger i venstre halvplan, er systemet *marginalt stabilt*, for da vil én $h_i(t)$ gå mot en konstant verdi forskjellig fra 0 når $t \rightarrow \infty$. (3) Hvis minst én pol ligger i høyre halvplan, er systemet *ustabilt*, for da vil det fins minst én $h_i(t)$ som går mot ∞ når $t \rightarrow \infty$.

La oss nå se på tilfellet at det kan være *multiple* (sammenfallende poler) i $H(s)$. Impulsresponsen $h(t)$ er gitt ved (6.6). Anta at først at multiplisiteten av polen p_i er $m = 2$. Da er det tilsvarende bidraget til den totale impulsresponsen gitt ved

$$h_i(t) = \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ \frac{d}{ds} [(s - p_i)^2 H(s) e^{st}] \right\} \quad (6.14)$$

Uttrykket $\frac{d}{ds}(e^{st})$ er lik te^{st} , hvilket betyr at $h_i(t)$ vil inneholde bl.a. $te^{p_i t}$. Ved å utføre samme analyse som for enkle poler, vil vi finne følgende: (1) $h_i(t) \rightarrow 0$ for en pol med negativ realdel ($te^{p_i t}$ går mot null da $e^{p_i t}$ avtar raskere enn t). (2) $h_i(t) \rightarrow \infty$ for en pol på imaginæraksen ($te^{p_i t}$ er da lik t). (3) $h_i(t) \rightarrow \infty$ for en pol med positiv realdel. Vi får samme resultater dersom multiplisiteten m er større enn 2.

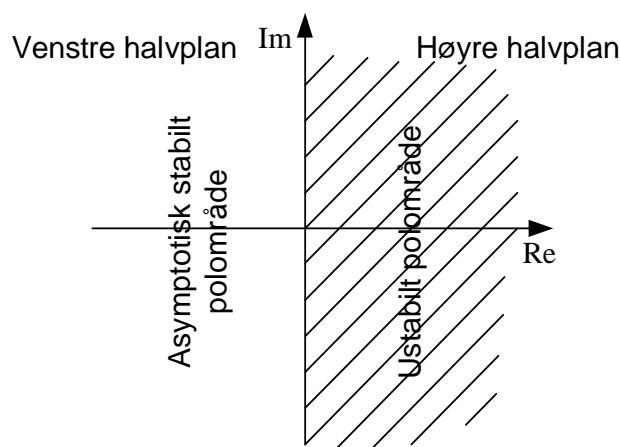
Fra analysen ovenfor kan vi oppsummere som følger:

- **Asymptotisk stabilt system:** Alle polene i systemets transferfunksjon ligger i venstre halvplan, dvs. at alle polene har strengt negativ realdel.
- **Marginalt stabilt system:** Én eller flere poler ligger på den imaginære akse, dvs. at disse polene har realdel null, og de er ikke sammenfallende. Og ingen poler ligger i høyre halvplan.
- **Ustabilt system:** Minst én pol ligger i høyre halvplan, dvs. har realdel større enn null. Eller: Det er sammenfallende (multiple) poler på den imaginære akse.

Figur 6.4 gir en illustrasjon av sammenhengen mellom stabilitetsegenskaper og polplassering.

En tilstrekkelig betingelse for ustabilitet eller marginal stabilitet

Før vi ser på eksempler, vil jeg presentere en *tilstrekkelig betingelse* for at et system er *ustabilt eller marginalt stabilt* (altså ikke asymptotisk stabilt) Denne betingelsen kan brukes til superraskt å fastslå ustabilitet – uten å



Figur 6.4: Sammenhengen mellom stabilitetsegenskaper og polplassering

måtte beregne polene. Følgende kan vises: En tilstrekkelig betingelse for at et polynom med reelle koeffisienter har én eller flere poler med positiv realdel, er at noen av koeffisientene er null eller har forskjellig fortegn. Hvis vi anvender dette på det karakteristiske polynom, får vi: *En tilstrekkelig betingelse for at et system er ustabil eller marginalt stabilt (dvs. ikke er asymptotisk stabilt), er at noen av koeffisientene i transferfunksjonens karakteristiske polynom er null eller har forskjellig fortegn.* For eksempel vil et system med karakteristisk polynom $a(s) = s^3 - s^2 + 3s + 4$ sikkert være ustabil eller marginalt stabilt, dvs. det er sikkert at det ikke er asymptotisk stabilt.

Siden betingelsen nevnt ovenfor er tilstrekkelig og ikke nødvendig, kan vi ikke konkludere at systemet er stabilt dersom betingelsen ikke er oppfylt. Eksempel: Hvis $a(s) = s^3 + s^2 + 3s + 4$, kan vi ikke umiddelbart si noe om stabilitetsegenskapene (vi må regne ut polene).

Eksempel 49 *Stabilitetsegenskaper for noen enkle dynamiske systemer*

Et system med transferfunksjonen

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad (6.15)$$

har pol $p = -1$, som ligger i venstre halvplan. Systemet er derfor asymptotisk stabilt.

Et system med transferfunksjonen

$$H_2(s) = \frac{1}{s} \quad (6.16)$$

(som er transferfunksjonen for en integrator) har pol $p = 0$, som ligger på imaginæraksen og har multiplisitet 1. Systemet er derfor marginalt stabilt.

Et system med transferfunksjonen

$$H_3(s) = \frac{1}{s^2} \quad (6.17)$$

har pol $p = 0$, som ligger på imaginæraksen og har multiplisitet 2. Systemet er derfor ustabilt.

Et system med transferfunksjonen

$$H_4(s) = \frac{1}{s-1} \quad (6.18)$$

har pol $p = +1$, som ligger i høyre halvplan. Systemet er derfor ustabilt.

[Slutt på eksempel 49]

Eksempel 50 *Stabilitetsegenskap for masse-fjær-demper-system*

Masse-fjær-demper-systemet beskrevet i eksempel 4 side 28 har følgende transferfunksjon fra kraften F til posisjonen y :

$$H(s) = \frac{y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + Ds + K_f} \quad (6.19)$$

Gitt at $m = 20$ kg, $D = 4$ N/(m/s) og $K_f = 2$ N/m. Hvilken stabilitetsegenskap har systemet? Det karakteristiske polynom blir

$$a(s) = ms^2 + Ds + K_f = 20s^2 + 4s + 2 \quad (6.20)$$

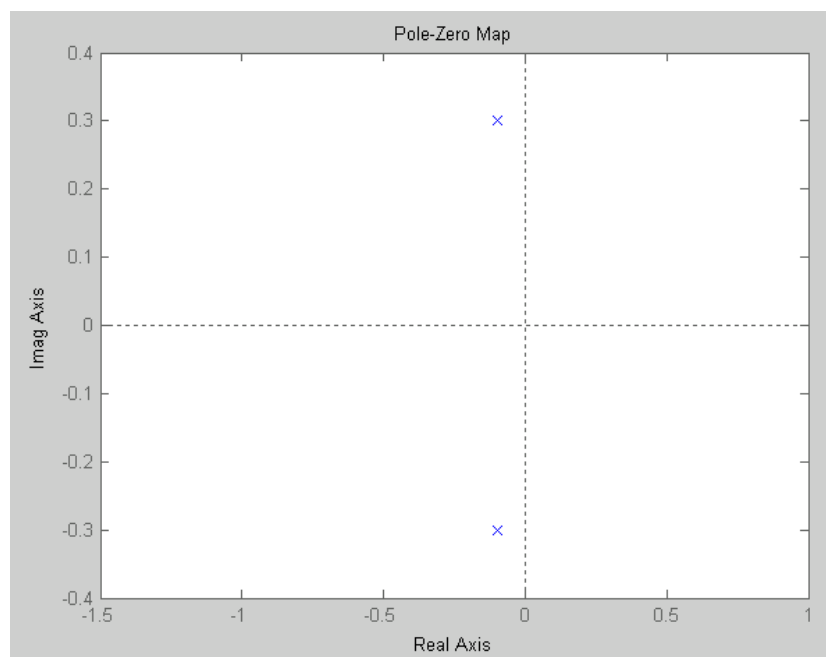
som har røtter

$$p_1, p_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 20 \cdot 2}}{2 \cdot 20} = -0,1 \pm j0,3 \quad (6.21)$$

som er polene for $H(s)$. Polenes realdel er $-0,1$, og systemet er derfor asymptotisk stabilt. Figur 6.5 viser polene avmerket med kryss i det komplekse plan. Figur 6.6 viser impulsresponsen.

Anta nå at dempeleddet er fjernet, slik at $D = 0$. Det karakteristiske polynom er da

$$a(s) = ms^2 + K_f \quad (6.22)$$



Figur 6.5: Polene for masse-fjær-demper-systemet avmerket i det komplekse plan. Polene er $p_{1,2} = -0,1 \pm j0,3$.

og polene er

$$p_1, p_2 = \pm j \sqrt{\frac{K_f}{m}} = \pm j0,32 \quad (6.23)$$

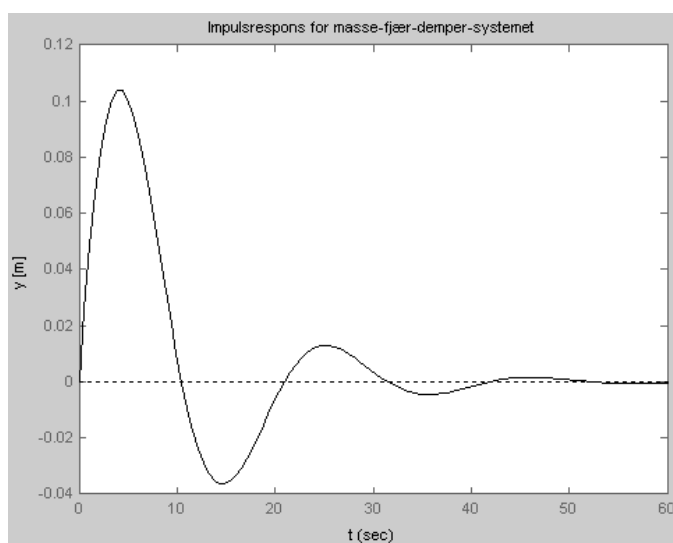
som ligger på den imaginære akse og har multiplisitet 1. Systemet er da marginalt stabilt. Figur 6.7 viser impulsresponsen.

[Slutt på eksempel 50]

Stabilitetsanalyse er viktig i reguleringsteorien, siden det er et overordnet krav til reguleringssystemer at de er asymptotisk stabile og systemene kan bli ustabile ved feil valg av regulatorparametre. Dette demonstreres i følgende eksempel.

Eksempel 51 *Stabilitetsegenskaper for tilbakekoplet reguleringssystem*

Et tilbakekoplet reguleringssystem blir ustabil dersom forsterkningen i reguleringssløyfen blir for stor. Vi skal se et eksempel på dette. Figur 6.8 viser et transferfunksjonsbasert blokkdiagram for et reguleringssystem. De



Figur 6.6: Impulsresponsen for masse-fjær-demper-systemet med $m = 20$ kg, $D = 4$ N/(m/s) og $K_f = 2$ N/m. Systemet er da asymptotisk stabilt.

enkelte transferfunksjonene er:

$$H_{mr}(s) = K_{mr} = 1 \quad (6.24)$$

$$H_m(s) = K_m = 1 \quad (6.25)$$

$$H_r(s) = K_p \quad (6.26)$$

$$H_p(s) = \frac{1}{(s+1)^2 s} \quad (6.27)$$

Vi antar at forsterkningen K_p i regulatorens transferfunksjon kan variere. Reguleringsystemets stabilitetsegenskap kan bestemmes ut fra polene i reguleringsystemets transferfunksjon, som er transferfunksjonen fra referansen r til prosessutgangen y . Denne har vi tidligere funnet, jf. eksempel 27 side 92:

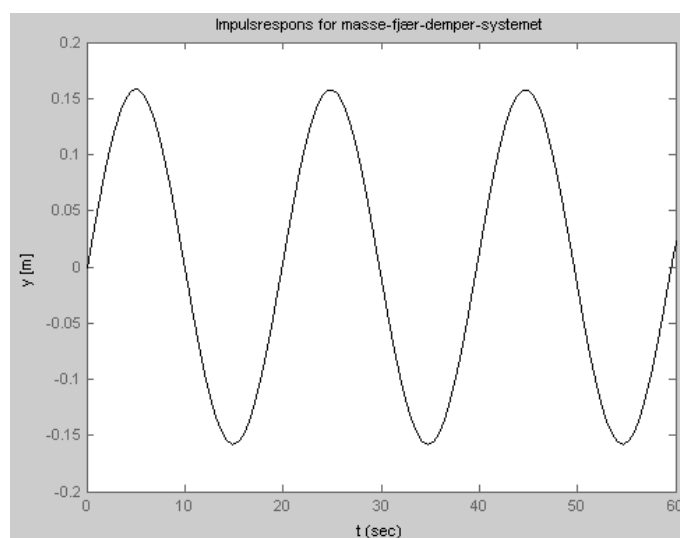
$$H_{yr}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{H_{mr}(s)H_r(s)H_p(s)}{1 + H_m(s)H_r(s)H_p(s)} \quad (6.28)$$

Ved å sette inn transferfunksjonene gitt ovenfor, får vi

$$H_{yr}(s) = \frac{K_p}{s^3 + 2s^2 + s + K_p} \quad (6.29)$$

Det karakteristiske polynom er

$$a(s) = s^3 + 2s^2 + s + K_p \quad (6.30)$$

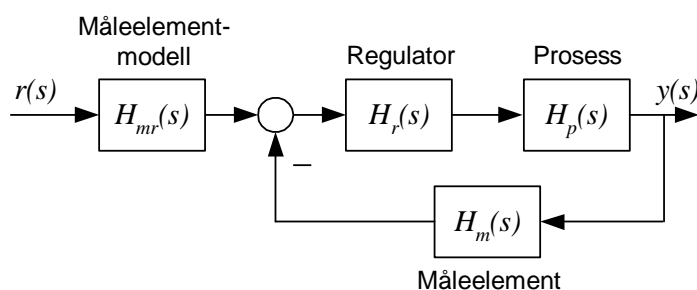


Figur 6.7: Impulsresponsen for masse-fjær-demper-systemet med $m = 20$ kg, $D = 0$ N/(m/s) og $K_f = 2$ N/m. Systemet er da marginalt stabilt.

Tabellen nedenfor viser polene for 3 forskjellige K_p -verdier (polene kan beregnes vha. MATLAB-funksjonen roots eller pzmap eller pole eller vha. LabVIEW-funksjonen Complex Polynomial Roots, jf. kap. 6.7).

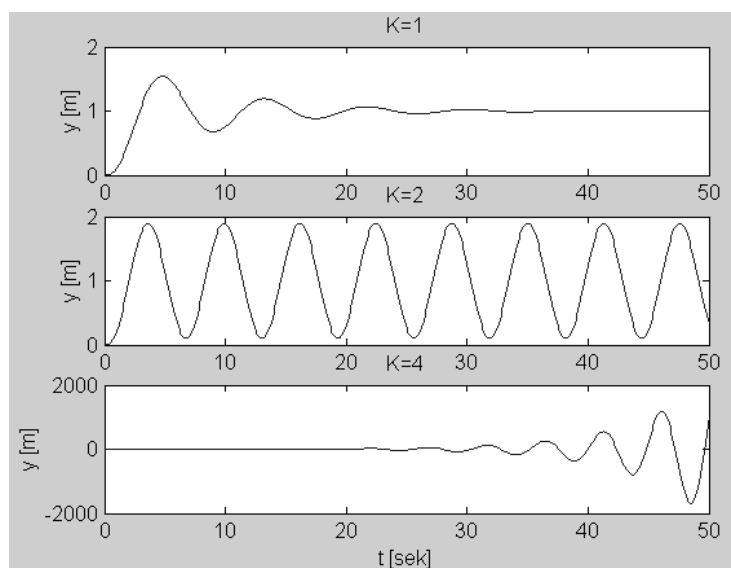
$K_p = 1$ (asympt. stabilt)	$K_p = 2$ (marg. stabilt)	$K_p = 4$ (ustabilt)
$p_1 = -1,75$	$p_1 = -2$	$p_1 = -2,31$
$p_2 = -0,12 + j0,74$	$p_2 = j$	$p_2 = 0,16 + j1,31$
$p_3 = -0,12 - j0,74$	$p_3 = -j$	$p_3 = 0,16 - j1,31$

Figur 6.9 viser sprangresponsen i y for de 3 K_p -verdiene. Det er da et



Figur 6.8: Transferfunksjonsbasert blokkdiagram for et reguleringsystem

enhetsprang i r .



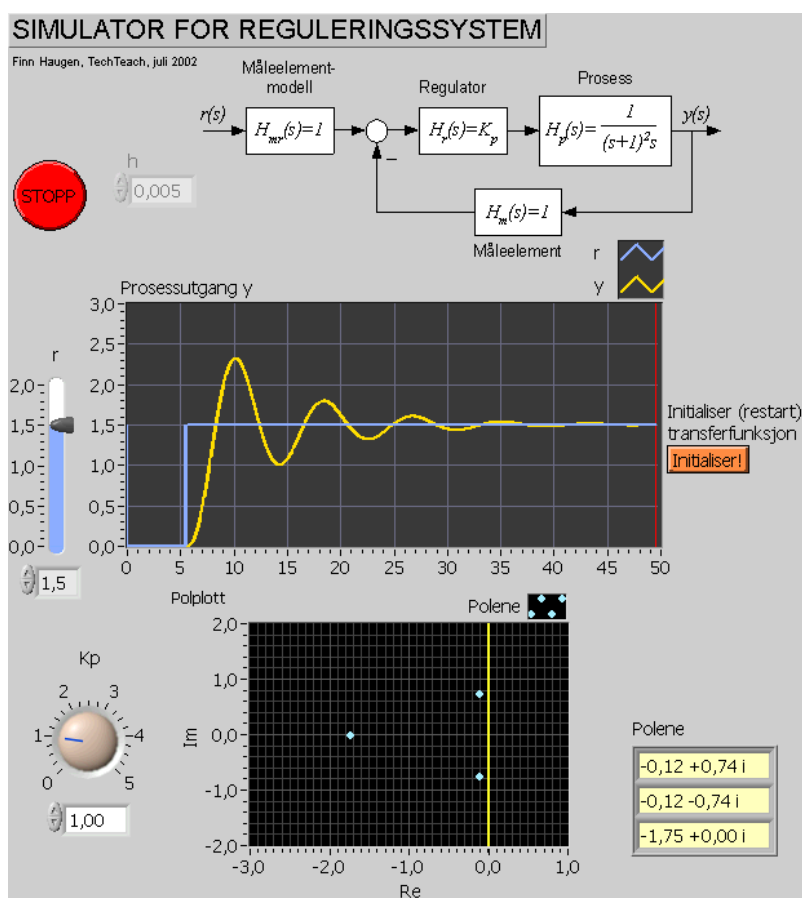
Figur 6.9: Sprangresponsen i reguleringsystemets utgangsvariabel y for 3 K_p -verdier

La oss til slutt se litt på LabVIEW-simulator for reguleringsystemet. Figur 6.10 viser simulatorens frontpanel, der responsen i reguleringsystemets utgangsvariabel y plottes og polplasseringen plottes. Referansen r og regulatorforsterkningen K_p kan justeres i sann tid. I figuren har K_p verdi 1.

Det kan vises (f.eks. gjennom nøyaktige simuleringer eller ved å bruke Rouths stabilitetskriterium, som ikke beskrives i denne boken) at reguleringsystemet er asymptotisk stabilt for K_p større enn 0 og mindre enn 2.

Stabiliteten i sløyfen blir påvirket på samme måte hvis det er forsterkningen i $H_p(s)$ eller i $H_m(s)$ som økes i stedet for forsterkningen i $H_r(s)$. En forsterkningsøkning i $H_{mr}(s)$ har ingen ting å si for stabiliteten da den befinner seg utenfor reguleringsløyfa.

[Slutt på eksempel 51]



Figur 6.10: Frontpanelet for et LabVIEW-program for reguleringsystemet. Responsen i prosessutgangen y samt polplasseringen plottes i sann tid, bl.a. som funksjon av regulatorforsterkningen K_p .

6.5 Stabilitetsegenskaper for tilstandsrommodeller

I underkap. 6.4 knyttet vi stabilitetsegenskapene til polene i systemets transferfunksjon. Hvis systemets modell er gitt som en tilstandsrommodell:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \quad (6.31)$$

$$y = C\underline{x} + Du \quad (6.32)$$

kan vi finne transferfunksjonen fra tilstandsrommodellen med bruk av følgende uttrykk, som ble utledet i kap. 3.3.5,

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \equiv C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B + D \quad (6.33)$$

og deretter bestemme stabilitetsegenskapen ut fra polene. Vi vet at polene er lik løsningene av den karakteristiske likning $a(s) = 0$. Fra (6.33) ser vi at den karakteristiske likning er

$$a(s) = \det(sI - A) = 0 \quad (6.34)$$

Men (6.34) er jo selve uttrykket som definerer egenverdiene av A , systemmatrisen.⁴ Så dermed har vi: *Transferfunksjonens poler er lik egenverdiene av systemmatrisen A , og stabilitetsegenskapene kan fastslås ut fra plasseringen av egenverdiene av A i det kompleks plan.*

En liten modifikasjon: For noen systemer kan noen pol-faktorer, det vil si faktorer av typen $(s - p_i)$, forkortes mot noen nullpunkt-faktorer $(s - z_i)$ i transferfunksjonen. Slike pol/nullpunkt-kanselleringer vil medføre at noen av polene “forsviner” fra transferfunksjonen, og polene vil da utgjøre bare en delmengde av egenverdiene. Det kan altså i prinsippet eksistere egenverdier som ikke også er poler, hvilket gjør at stabilitetsanalyse ut fra egenverdiene *kan* gi et annet resultat enn stabilitetsanalyse ut fra polene.

6.6 Intern stabilitet

Stabilitetsdefinisjonen som er basert på impulsresponsen, uttrykker såkalt *inn-ut-stabilitet* eller *ekstern stabilitet*. Et annet stabilitetsbegrep er *intern stabilitet*, som kan karakteriseres ved den måten systemets tilstandsvariable \underline{x} svinger seg inn (eller ikke svinger seg inn) på fra en initialtilstand \underline{x}_0 :

- **Asymptotisk stabilt system:** Alle tilstandene (dvs. alle elementene) i tilstandsvektoren $\underline{x}(t)$ går mot null stasjonært, dvs. når $t \rightarrow \infty$.
- **Marginalt stabilt system:** Minst én av tilstandene er forskjellig fra null, men begrenset, stasjonært.
- **Ustabilt system:** Minst én av tilstandene går mot en ubegrenset verdi stasjonært.

Et system er (internt) *stabilt* hvis det er enten asymptotisk stabilt eller marginalt stabilt.

⁴I matematikkfagene er det vanlig å bruke symbolet λ i stedet for s når det er snakk om egenverdier, men navnet skjemmer ingen!

Vi skal nå knytte disse stabilitetsdefinisjonene til systemets *egenverdier*: La oss betrakte tilstandsrommodellen

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} \quad (6.35)$$

der inngangsvariabelen \underline{u} er satt lik null siden vi nå skal studere systemets *autonome*⁵ oppførsel. Fra (3.46) i kap. 3.2.4 har vi at løsningen er

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0 = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} \underline{x}_0 \quad (6.36)$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \underline{x}_0 \} \quad (6.37)$$

$$\equiv \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \underline{x}_0 \right\} \quad (6.38)$$

$$\equiv \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\text{adj}(sI - A)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} \underline{x}_0 \right\} \quad (6.39)$$

der $\{\lambda_i\}$ er s -røttene i $\det(sI - A)$ og dermed er *egenverdiene* i A , dvs. at $\{\lambda_i\} = \text{eig}(A)$. (6.39) er et Laplaceuttrykk som kan invers-transformeres på samme måte som vi invers-transformerte uttrykket $H(s)$ vha. (6.6), (6.7). Invers-transformasjon av $H(s)$ ga en sum av ledd av typen (6.13). La oss nå betrakte $x_1(t)$. Hvis egenverdiene er distinkte (multiplisitet 1), vil $x_1(t)$, analogt med (6.13), bli på formen

$$x_1(t) = \sum_i k_i e^{\lambda_i t} \quad (6.40)$$

der $\{k_i\}$ er konstanter. Vi drøfter ikke tilfellene med multiplisitet større enn 1.

Vi får ut fra ovenstående analyse følgende stabilitetsbetingelser for intern stabilitet for systemet (6.35):

- **Asymptotisk stabilt system:** Alle egenverdiene for matrisen A ligger i venstre halvplan.
- **Marginalt stabilt system:** Én eller flere egenverdier ligger på den imaginære akse, og de er ikke sammenfallende. Og ingen egenverdier ligger i høyre halvplan.
- **Ustabilt system:** Minst én egenverdi ligger i høyre halvplan. Eller: Det er sammenfallende (multiple) egenverdier på den imaginære akse.

Eksempel 52 Intern stabilitet for tilstandsrommodell

⁵ "selvdrevne"

Gitt tilstandsrommodellen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (6.41)$$

Eigenverdiene $\{\lambda_i\}$ for A er løsningene av den karakteristiske likning:

$$\det(sI - A) = \det\left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (s + 1)(s - 1) = 0 \quad (6.42)$$

Eigenverdiene er altså $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 1$. Siden minst én av eigenverdiene, her λ_2 , ligger i høyre halvplan, er systemet internt ustabil.

Vha. (6.36) vil vi finne

$$x_1(t) = x_{10}e^{\lambda_1 t} = x_{10}e^{-t} \quad (6.43)$$

$$x_2(t) = x_{20}e^{\lambda_2 t} = x_{20}e^t \quad (6.44)$$

$x_1(t)$ går mot 0 stasjonært, mens $x_2(t)$ går mot ∞ stasjonært hvilket gjør at systemet er internt ustabil.

[Slutt på eksempel 52]

6.7 Verktøy for stabilitetsanalyse

Alle analyseverktøy (programmer) som kan beregne røttene i et polynom (det karakteristiske polynom) eller eigenverdiene for en matrise (systemmatrisen A i en tilstandsrommodell), kan benyttes til å bestemme stabilitetsegenskapene for et system. Bl.a. kan MATLAB, SIMULINK og LabVIEW gjøre dette.