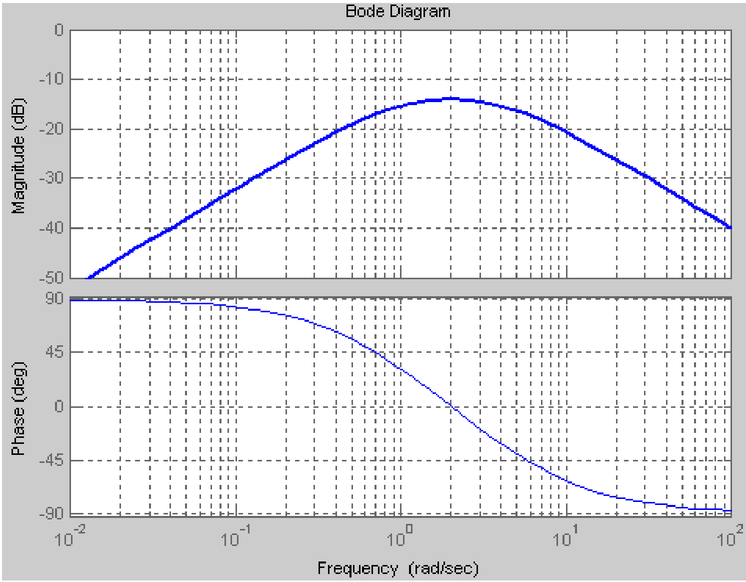


Figur 30: Oppgave 5.12: Frekvensresponsen fra T_i til T for regulert system

Kapittel 6

Stabilitetsanalyse

Oppgave 6.1 Stabilitetsegenskap for transferfunksjoner

Bestem stabilitetsegenskapen for følgende transferfunksjoner:

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \tag{6.126}$$

$$H_2(s) = \frac{1-s}{1+s} \tag{6.127}$$

$$H_3(s) = \frac{1}{1-s} \tag{6.128}$$

$$H_4(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \tag{6.129}$$

$$H_5(s) = \frac{1}{s} \tag{6.130}$$

$$H_6(s) = \frac{1}{s^3} \tag{6.131}$$

$$H_7(s) = \frac{e^{-s}}{s+1} \tag{6.132}$$

$$H_8(s) = -\frac{1}{s+1} \tag{6.133}$$

$$H_9(s) = -\frac{1}{s^2-s+1} \tag{6.134}$$

$$H_{10}(s) = -\frac{1}{s^2+s+1} \tag{6.135}$$

$$H_{11}(s) = -\frac{1}{s^2+1} \tag{6.136}$$

$$H_{12}(s) = -\frac{1}{(s+1)s} \tag{6.137}$$

Oppgave 6.2 Stabilitetsegenskap for tilstandsrommodell

Bestemt (den interne) stabilitetsegenskapen for følgende tilstandsrommodell:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{6.138}$$

Oppgave 6.3 Polkurver for reguleringssystem

Se eksempel 51 side 170 osv. i læreboken. Reguleringssystemets følgeforhold, som er transferfunksjonen fra referanse til prosessutgang, er

$$H_{yr}(s) = \frac{K_p}{s^3+2s^2+s+K_p} = \frac{K_p}{a(s)} \tag{6.139}$$

der

$$a(s) = s^3 + 2s^2 + s + K_p \tag{6.140}$$

er transferfunksjonens karakteristiske polynom. Reguleringssystemets poler er røttene i $a(s)$.

Tabell 2 viser noen sammenhørende verdier for K_p og polene.[5]

K_p	p_1	p_2	p_3
$0,1$	$-1,28$	$-0,59$	$-0,13$
$0,25$	$-1,42$	$-0,26+j0,30$	$-0,26-j0,30$
1	$-1,75$	$-0,12+j0,74$	$-0,12-j0,74$
2	-2	j	$-j$
4	$-2,13$	$0,16+j1,31$	$0,16-j1,31$

Tabell 2:Oppgave 6.3: Sammenhørende verdier for K_p og reguleringssystemets poler

a. Kontroller at tabell 2 gir korrekt informasjon for $K_p = 2$ (en mer eller mindre tilfeldig valgt K_p-verdi).

b. Tegn med utgangspunkt i tabell 2 reguleringssystemets *polkurver* som funksjon av K_p i det komplekse planet. (Polkurvene er generelt stedkurven for polplasseringen med en gitt parameter – i dette tilfellet regulatorforsterkningen K_p – som fri variabel.) For hvilken K_p blir reguleringssystemet ustabilt? Beskriv polenes plassering (stedkurve) for økende K_p slik du ser tendensen fra polkurvene.

Oppgave 6.4 Stabilisering vha. tilbakekopling

Stabilisering vha. tilbakekopling brukes bl.a. for å stabilisere raketter, fartøyer og eksoterme (ustabile) reaktorer. Denne oppgaven illustrerer prinsippet.

Figur 31 viser et blokkdiagram av et tilbakekoplet system, som kan være et reguleringssystem med $H_r(s)$ som regulator og $H_p(s)$ som prosess. Anta at

$$H_r(s) = K_r \tag{6.141}$$

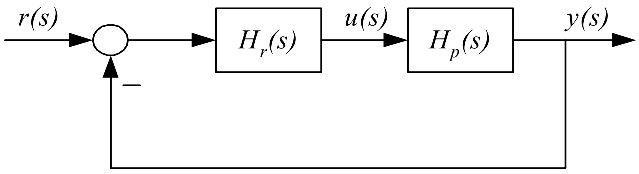
og

$$H_p(s) = \frac{1}{1-s} \tag{6.142}$$

a. Påvis at $H_p(s)$ er ustabil.

b. Finn for hvilke K-verdier det tilbakekoplede systemet er asymptotisk stabilt. Tips: Studer transferfunksjonen fra r til y. Du kan kalle den $M(s)$.

[5] Polene kan beregnes med f.eks. roots-funksjonen i MATLAB.



Figur 31: Oppgave 6.4: Blokkdiagram av et tilbakekoplet system

c. Velg én K_r-verdi (f.eks. -10) som gir asymptotisk stabilt system. Skriv opp $M(s)$, som blir av 1. orden. Finn forsterkningen K og tidskonstanten T for $M(s)$.

Løsning 5.12

a. Avlesning i figur 29 viser at amplitudefunksjonen ved frekvens 0,1 rad/s for det uregulerte systemet er

$$\underline{\underline{A_{\text{uregulert}}(0,1) \approx 0 \; dB = 1}} \tag{7.528}$$

b. Avlesning i figur 30 viser at amplitudefunksjonen ved frekvens 0,1 rad/s for det regulerte systemet er

$$\underline{\underline{A_{\text{regulert}}(0,1) \approx -32 \; dB = 0,025}} \tag{7.529}$$

Med regulering er altså utslaget i T pga. T_i ca. 40 ganger mindre sammenliknet med det uregulerte tilfellet.

Løsning 6.1

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \tag{7.530}$$

er $\underline{\underline{\text{asymptotisk stabil}}}$ siden polen $p = -1$ ligger i venstre halvplan.

$$H_2(s) = \frac{1-s}{1+s} \tag{7.531}$$

er $\underline{\underline{\text{asymptotisk stabil}}}$ siden polen $p = -1$ ligger i venstre halvplan.

$$H_3(s) = \frac{1}{1-s} \tag{7.532}$$

er $\underline{\underline{\text{ustabil}}}$ siden polen $p = 1$ ligger i høyre halvplan.

$$H_4(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \tag{7.533}$$

er $\underline{\underline{\text{ustabil}}}$ siden én av polene, $p_1 = 1$, ligger i høyre halvplan.

$$H_5(s) = \frac{1}{s} \tag{7.534}$$

er $\underline{\underline{\text{marginal stabil}}}$ siden polen $p = 0$ ligger i origo, som er på den imaginære akse, og polene på imaginæraksen er enkle.

$$H_6(s) = \frac{1}{s^3} \tag{7.535}$$

er $\underline{\underline{\text{ustabil}}}$ siden det er multiple poler, $p_{1,2,3} = 0$, på imaginæraksen.

$$H_7(s) = \frac{e^{-s}}{s+1} \tag{7.536}$$

er asymptotisk stabil siden $p = -1$ ligger i venstre halvplan.

$$H_8(s) = -\frac{1}{s+1} \tag{7.537}$$

er asymptotisk stabil siden $p = -1$ ligger i venstre halvplan.

$$H_9(s) = -\frac{1}{s^2 - s + 1} \tag{7.538}$$

er ustabil. Minst én av polene vil nemlig ligge i høyre halvplan siden noen av koeffisientene har forskjellige fortegn.

$$H_{10}(s) = -\frac{1}{s^2 + s + 1} \tag{7.539}$$

er asymptotisk stabil. Polene er

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{4 \cdot 1} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{4} \tag{7.540}$$

som begge ligger i venstre halvplan.

$$H_{11}(s) = -\frac{1}{s^2 + 1} \tag{7.541}$$

er marginal stabil siden polene er $p_{1,2} = \pm j$, som ligger på den imaginære akse og er enkle.

$$H_{12}(s) = -\frac{1}{(s+1)s} \tag{7.542}$$

er marginal stabil siden én av polene, $p_1 = 0$, ligger på den imaginære akse og er enkel.

Løsning 6.2

Egenverdiene er s-røttene i den karakteristiske likning $a(s)$:

$$\begin{aligned}
a(s) &= 0 = \det(sI - A) && (7.543)\\
&= \det\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\right) && (7.544)\\
&= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}\right) && (7.545)\\
&= s(s+2) - 1 \cdot (-1) && (7.546)\\
&= s^2 + 2s + 1 && (7.547)\\
&= (s+1)(s+1) && (7.548)
\end{aligned}$$

som har løsninger

$$\begin{aligned} s_1 &= -1 \\ s_2 &= -1 \end{aligned} \tag{7.549}$$

som er systemets egenverdier. Alle systemets poler ligger i venstre halvplan, og systemet er derfor asymptotisk stabilt.

Løsning 6.3

a. $a(s)$ skal ha verdi 0 for hver av polene. K_p er 2. Vi får

$$a(p_1)|_{p_1=-2} = p_1^3 + 2p_1^2 + p_1 + K_p \tag{7.550}$$

$$= (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2 \tag{7.551}$$

$$= 0 \text{ Stemmer!} \tag{7.552}$$

$$a(p_2) = j^3 + 2 \cdot j^2 + j + 2 \tag{7.553}$$

$$= -j - 2 + j + 2 \tag{7.554}$$

$$= 0 \text{ Stemmer!} \tag{7.555}$$

$$a(p_3) = (-j)^3 + 2 \cdot (-j)^2 + (-j) + 2 \tag{7.556}$$

$$= j - 2 - j + 2 \tag{7.557}$$

$$= 0 \text{ Stemmer!} \tag{7.558}$$

b. Figur 53 viser polkurvene som funksjon av K_p.

Reguleringssystemet blir ustabilt for $K_p > 4$. For økende K_p går den ene av polene lenger og lenger mot venstre i venstre halvplan, mens de andre to polene er kompleks konjungerte og går lenger og lenger mot høyre i høyre halvplan. Det siste innebærer at systemet er ustabilt (for K_p større enn 4).

Løsning 6.4

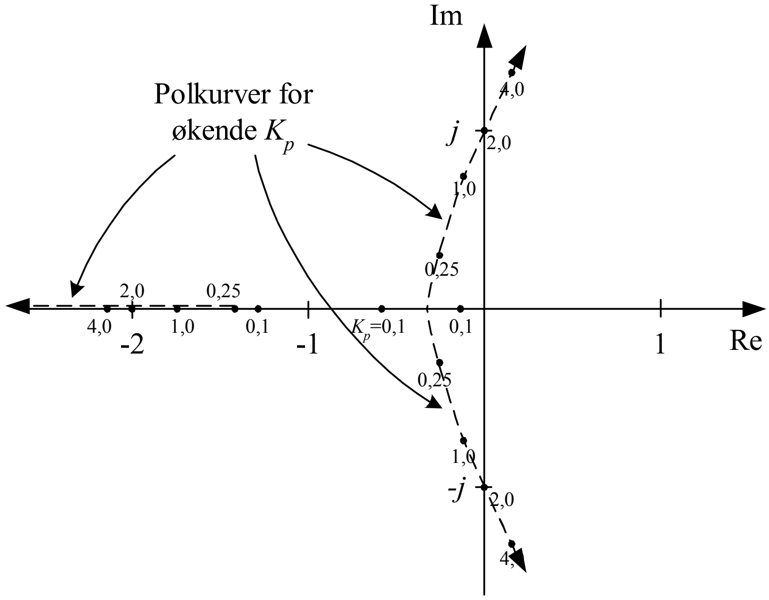
a. $H_p(s)$ har pol lik $+1$, som ligger i høyre halvplan, hvilket betyr at systemet er ustabilt.

b. Transferfunksjonen fra r til y kan finnes slik: Fra blokkdiagrammet ser vi at

$$y(s) = H_p(s)H_r(s)\left[r(s) - y(s)\right] \tag{7.559}$$

som løst mhp. $y(s)$ gir

$$M(s) = \frac{H_p(s)H_r(s)}{1 + H_p(s)H_r(s)} = \frac{\frac{1}{1-s} \cdot K_r}{1 + \frac{1}{1-s} \cdot K_r} = \frac{K_r}{1 + K_r - s} \tag{7.560}$$



Figur 53: Løsning 6.3: Polkurvene som funksjon av K_p

Polen p er roten i den karakteristiske likning

$$a(s) = 1 + K_r - s = 0 \tag{7.561}$$

som gir

$$p = 1 + K_r \tag{7.562}$$

Polen havner i venstre halvplan dersom

$$p = 1 + K_r < 0 \tag{7.563}$$

hvilket gir at systemet er asymptotisk stabilt for

$$\underline{\underline{K_r < -1}} \tag{7.564}$$

c. Velger $K_r = -10$:

$$M(s) = \frac{K_r}{1 + K_r - s} = \frac{-10}{1 - 10 - s} = \frac{10}{s + 9} = \frac{10/9}{\frac{1}{9}s + 1} = \frac{K}{Ts + 1} \tag{7.565}$$

Forsterkningen blir

$$\underline{\underline{K = 1,11}} \tag{7.566}$$

og tidskonstanten blir

$$\underline{\underline{T = 0,11}} \tag{7.567}$$

Løsning 7.1

Vi skriver først opp regresjonsmodellen (7.19) i læreboken:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3,4 \\ 3,8 \\ 3,7 \\ 3,6 \end{bmatrix}}_{\underline{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{K}_{\underline{\theta}} \tag{7.568}$$

LS-estimatet kan beregnes fra (7.31) i læreboken:

$$\begin{aligned}
\underline{\theta}_{\text{LS}} &= \underline{\underline{K_{\text{LS}}}} && (7.569)\\
&= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \underline{y} && (7.570)\\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,4 \\ 3,8 \\ 3,7 \\ 3,6 \end{bmatrix} && (7.571)\\
&= \underline{\underline{3,625}} && (7.572)
\end{aligned}$$

Løsning 7.2

K er gitt ved modellen

$$\begin{aligned}
y_k &= K && (7.573)\\
&= 1 \cdot K && (7.574)\\
&= \varphi \underline{\theta} && (7.575)
\end{aligned}$$

som er på standardformen (7.14) i læreboken.